

工业和信息化部“十二五”规划教材

# 现代微分几何

孙和军 赵培标 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书是“工业和信息化部‘十二五’规划教材”。本书针对理工科学生的特点和人才培养的需要编写,体现内容的完备性、易懂性、应用性、实践性、文化性和前沿性。全书共6章,主要包括:曲线与曲面论,张量代数和外形式,微分流形,切向量场、单参数变换群与切丛,张量场、黎曼流形与列维-齐维塔联络,流形上的积分、微分算子和德拉姆上同调。本书提供配套电子课件、MATLAB程序代码等。

本书可供理工科高等学校的数学、计算机设计、图形处理、物理等专业的研究生和高年级本科生作为学习现代微分几何、微分流形课程的教材使用,也可供数学工作者参考使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

现代微分几何 / 孙和军, 赵培标编著. —北京: 电子工业出版社, 2015.8

工业和信息化部“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-26272-2

I. ①现… II. ①孙… ②赵… III. ①微分几何—高等学校—教材 IV. ①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 125049 号

策划编辑: 王晓庆

责任编辑: 王晓庆

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 14 字数: 358 千字

版 次: 2015 年 8 月第 1 版

印 次: 2015 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线: (010) 88258888。

# 导 论

数学的理论发展是建立在公理化基础之上的，后人在前人工作基础之上的创新推动了数学的发展。法国数学家庞加莱（J. H. Poincare, 1854—1912 年）曾经说过：“如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。”而了解一些几何学发展的历史情况，可以为阅读本书所涉及的微分几何内容提供一个清晰的历史脉络。

杨振宁先生曾为陈省身先生（S. S. Chern, 1911—2004 年）写过一首名为“赞陈氏级”的诗：“天衣岂无缝，匠心剪接成。浑然归一体，广邃妙绝伦。造化爱几何，四力纤维能。千古寸心事，欧高黎嘉陈。”这首诗中提到了欧几里得、高斯、黎曼、嘉当、陈省身 5 位数学大师。而这 5 位数学家大致对应于几何学发展的几个时期，可以看成是几何学相应发展阶段的代表人物。以他们的生平和学术贡献为线索和基础，并进行适当的扩充，我们大致可以梳理出几何的发展历程。若以此作为本书学习的一条历史线索，则可以对本书所涉及的知识点有感性的认识。

几何学的系统发展开始于欧几里得（Euclide, 公元前 325—265 年）的《几何原本》。在这本发行量仅次于《圣经》的经典著作中，欧几里得研究了平面上的规则几何图形，如点、直线、多边形等。《几何原本》更重要的贡献在于为数学乃至科学的发展提供了构建理论体系的公理化方法。在欧几里得之后的长达两千年的时间里，几何学的研究都是围绕着这些几何对象展开的。因此，在很长的一段时间里，人们认为：“几何即欧几里得，欧几里得即几何”。

法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596—1650 年）发明了直角坐标系，将代数方法应用于几何研究，创立了解析几何。这大大拓广了几何学的研究对象：方程对应的曲线、曲面等都纳入几何学的研究范畴。这也为后来微积分的发明创造了条件，为微分几何的出现奠定了基础。

17 世纪初，社会进步和生产力发展对变量数学产生迫切的需求。在此背景下，微积分被英国数学家牛顿（I. Newton, 1643—1727 年）和德国数学家莱布尼兹（G. H. Leibniz, 1646—1716 年）分别独立创立起来。微积分给数学带来了巨大的变革，成为现代数学发展的重要基石。它也给几何研究带来了新的思想和工具。人们开始用微积分来研究曲线和曲面这样的几何对象，这就是微分几何。微分几何（differential geometry）的命名最早来源于由意大利数学家比安基（L. Bianchi, 1856—1928 年）所使用的意大利语“geometria differenziale”一词。在黎曼几何出现之前，几何学发展的这个时期都可以划归为古典微分几何阶段。在这个时期，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707—1783 年）、法国数学家蒙日（G. Monge, 1746—1818 年）、德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777—1855 年）等众多数学家都为微分几何的发展做出了重要贡献。

1854 年，德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann, 1826—1866 年）发表了《论作为几何基础的假设》（德文原标题：Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen，英文翻译标题：On the hypotheses which underlie geometry）的就职演说。这是黎曼几何创立、现代微分几何开端的标志。在这篇具有里程碑意义的演说中，黎曼在高斯等人古典微分几何研究基础之上对空间的观念给予了重新认识，引入了现代数学的核心概念——流形。但限于当时其他数学分支理论的发展，黎曼给出的是流形概念的雏形，并不是现代形式的流形概念。

黎曼几何属于非欧几何。事实上,在黎曼创立黎曼几何之前,俄国数学家罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevsky, 1792—1856年)创立了另外一种非欧几何——罗氏几何。而高斯和匈牙利数学家鲍耶(J. Bolyai, 1802—1860年)也是非欧几何的最早发现者。德国数学家希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943年)曾经指出:“19世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何的发现。”

1895年,庞加莱在他的论文《拓扑》(*Analysis Situs*)中给出了流形定义,这是流形现代概念的先导。之后,在希尔伯特、德国数学家外尔(H. K. H. Weyl, 1885—1955年)、美国数学家惠特尼(H. Whitney, 1907—1989年)和其他数学家的先后努力下,流形、微分流形的现代形式定义最终形成。

1915年,美国物理学家爱因斯坦创立了广义相对论。而他创立广义相对论的重要数学工具和语言就是黎曼几何和张量分析。这让人们充分认识到微分几何的重要性。同时,这一事件也展现出数学与物理之间的殊途同归、相辅相成的关系。这种关系也被后来的杨-米尔斯规范场论与纤维丛的联络论之间的奇妙对应所再次印证。

20世纪20年代,法国数学家嘉当(Élie J. Cartan, 1869—1951年)很好地继承和发展了达布(J. G. Darboux, 1842—1917年)等人发现的外微分式和活动标架。著名华人数学家陈省身先生将之进一步发展和应用,给出了黎曼流形上的高斯-博内公式(Gauss-Bonnet formula)的内蕴证明,推动了大范围微分几何研究的深入。

现代微分几何已成为现代数学中发展最为迅速的分支之一。现代微分几何为非线性分析提供了舞台和工具,是开展现代数学研究不可或缺的语言和工具。同时,微分几何与多个数学分支相互渗透,产生了一些新的研究领域。例如,它与微分方程的融合交叉产生了几何分析,进而为世纪猜想——庞加莱猜想的解决提供了关键性的技术工具。微分几何也被广泛应用于大地测量中的地图描绘、生物数学中的DNA结构研究、图像处理、计算机辅助设计、建筑业中曲面的浇筑、机械加工业曲面工件的制作等方面。

流形是现代微分几何和现代数学的核心概念,也是本书的主要研究对象。“流形”(manifold)最早来源于德文的Mannigfaltigkeit一词,出现于1854年黎曼所发表的那篇著名的就职演说。“流形”的中文翻译最早是由我国著名数学家江泽涵先生给出的,出自南宋民族英雄、爱国诗人文天祥所作的《正气歌》中的一句诗:“天地有正气,杂然赋流形”。这句诗的大意是说:天地间有一股正气,纷杂地散步在各种形体上。流形为人们开展微分几何及其他数学研究、认识自然界提供了广阔的天地。曾获得菲尔兹奖和阿贝尔奖的著名英国数学家阿蒂亚(M. Atiyah, 1929年—)在其报告《20世纪的数学》中谈到“从局部到整体”、“维数的增加”、“从线性到非线性”、“几何与代数”等问题。这些问题都是现代微分几何中的重要问题,都与流形有着密不可分的联系。流形的附加结构为我们学习现代微分几何提供了一条主线。事实上,根据研究的需要,我们可以在流形上添加合适的附加结构:度量结构、微分结构、代数结构、复结构等,从而获得微分流形、李群、复流形等。仅就度量结构而言,就有黎曼流形、伪黎曼流形、次黎曼流形、芬斯勒流形等之分。我们不妨用“天地有真理,杂然赋流形”来概括流形附加结构及其作用:渐次增加的这些附加结构纷杂地附加在流形上,我们将以此为工具探究数学和自然中不同空间形式的真理——流形的性质。流形的多种附加结构为我们开展现代微分几何研究提供了工具,也带来了众多困难而又令人着迷的公开问题。这其中有一部分已在数学家们孜孜以求的不断努力下得以解决,但是还有许多未解决的问题,有待包括各位读者在内的有心人去继续探索。



# 前 言

“微分几何”在我国研究生数学教育课程体系中占据着重要地位，它承担着向研究生普及现代数学知识、培养学生数学思维和创新能力的功能。随着我国建设创新型国家步伐的加快，创新型人才培养的客观需要、学生知识背景和需求的变化都对研究生微分几何课程的教学提出了新的要求。在主持江苏省高等教育学会“十二五”高等教育科学研究规划课题、江苏省研究生教育教学改革研究与实践课题、南京理工大学研究生课程教学模式改革项目、南京理工大学高等教育教学改革研究课题的过程中，第一作者对“现代微分几何”课程的教学内容和教学方法做了一系列的改革尝试。本书是作者在多年讲授的“现代微分几何”课程的教案基础上，结合相关教学改革实践编写而成的。“工业和信息化部‘十二五’规划教材”项目为本书的出版提供了契机。本书可供理工科高等学校的数学、物理、计算机设计、图形处理等专业的研究生和高年级本科生作为学习现代微分几何、微分流形的课程教材使用，也可供数学工作者参考使用。

针对理工科学生的特点和人才培养的需要，本书注意体现内容的完备性、易懂性、应用性、实践性、文化性和前沿性。

第一，为了增强教材内容的完备性、提高教材的适用性，本书整合了曲线论、曲面论的主干内容和拓扑学的基本概念。本书内容可以分为古典微分几何和现代微分几何两部分：第一部分也就是本书的第1章，着重介绍古典微分几何的曲线和曲面主干理论，还包括公理化方法建立的欧氏空间的概念、向量代数和向量分析内容。第二部分是本书的第2~6章，介绍的是现代微分几何的基本概念、思想和方法，主要内容包括张量、外形式、微分流形、子流形、切向量场、单参数变换群、切丛、张量场、黎曼流形、协变微分、外微分式、流形上的积分、斯托克斯定理、流形上的微分算子、拉普拉斯算子的特征值、德拉姆上同调和霍奇分解定理等。我们希望通过这样的内容安排，能让具有微积分知识基础的读者自然地由古典微分几何进入现代微分几何。考虑到近年来许多理工科数学专业的研究生并没有古典微分几何的知识基础，以及服务于高年级本科生选修的需要，这样的安排还是有所裨益的。事实上，古典微分几何的曲线和曲面是现代微分几何中流形的低维例子，其概念和性质是研究和理解流形有关概念和性质不可或缺的基础。纵观全书，我们也希望通过这样的安排，可以为读者呈现几何学从欧氏几何、空间解析几何、古典微分几何直到现代微分几何的历史发展脉络和理论体系。

第二，为了加强教材内容的实践性，本书在第1章中安排了基于MATLAB的几何图形绘制的内容。这既是为了发挥数学软件在绘制几何图形方面的优势，帮助我们更好地理解曲线、曲面和流形等微分几何研究对象的概念和性质，也是为了顺应数学软件普及和使用增加的趋势，提高理工科学生使用数学软件的能力。

第三，为了突出教材内容的思想性、文化性和趣味性，本书将数学文化的有关内容有机地融入到教材中。创新型人才培养的一个重要任务是要寻找合适的工具来给予学生的创新人

格成长以正面的引导。而数学家是数学发展的引导者和实施者,数学理论中包含了由他们的创新精神和意志凝结而成的精神财富。我们以附录的形式着重介绍了笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650年)、欧拉(L. Euler, 1707—1783年)、高斯(C. F. Gauss, 1777—1855年)、嘉当(Élie J. Cartan, 1869—1951年)、黎曼(G. F. B. Riemann, 1826—1866年)、惠特尼(H. Whitney, 1907—1989年)、纳什(John Nash, 1928年—)、陈省身(S. S. Chern, 1911—2004年)、爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955年)、列维-齐维塔(T. Levi-Civita, 1873—1941年)、贝尔特拉米(E. Beltrami, 1835—1899年)、德拉姆(G. de Rham, 1903—1990年)的生平及学术贡献。他们与本书相关章节内容的历史发展背景紧密相关。同时,他们的生平和学术研究故事亦能带给读者很多启迪。例如,黎曼:40岁时即英年早逝,但在数学的多个领域中做出了开创性的贡献,被后人誉为最具创新精神的数学家之一;纳什:30岁前在博弈论和流形嵌入定理方面做出重要工作,而后罹患精神分裂症,30多年后神奇地康复了,并在晚年获得诺贝尔经济学奖;高斯、罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevsky, 1792—1856年)、鲍耶(J. Bolyai, 1802—1860年):“春天一到,紫罗兰竞相开放”,他们都是非欧几何的发现者,但对待自己研究结果和数学研究的态度和方式却截然不同。除了附录,本书在导论、各章引言和正文等处也穿插介绍了微分几何理论历史发展情况、数学家的学术贡献等内容。本书共提及130余位数学家,他们是几何、微分几何相关理论发展和一些重要公开问题研究的关键人物。我们希望读者能从这些数学家的生平和学术研究故事中感受数学家在数学理论的发现和创立过程中所展现出的创新精神和人格魅力;能了解微分几何理论知识背后的历史发展情况,并发现后续学习和研究的线索。希望这样的安排能对提高理工科研究生的数学修养、增加其学习兴趣和培养其创新能力有所帮助。

第四,为了体现教材内容的应用性、前沿性和学科交叉性,本书介绍了微分几何研究领域一些有代表性的研究结果和公开问题的研究进展情况,展示了微分几何在其他数学分支和学科中的应用。另外,本书对流形的微分结构给出了一些新颖的解释。对重要的专业词汇,本书给出相应的英文翻译。

希望这些编写安排和尝试能对提高理工科微分几何课程的教学质量起到抛砖引玉的效果。

教学中,可以根据教学对象和学时等具体情况对书中的内容进行删减和组合。为适应教学模式、教学方法和手段的改革,本书提供配套电子课件、MATLAB 程序代码等,请登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)注册下载。

本书由孙和军、赵培标编著,孙和军负责全书内容的编写,赵培标负责校核。在本书的写作过程中,第一作者得到了国家自然科学基金项目(批准号:11001130)、江苏省和南京理工大学相关教改项目的支持和资助,作者在此表示衷心的感谢。感谢“工业和信息化部‘十二五’规划教材”项目和评审专家对本教材的肯定。感谢我的妻子王海侠博士,她为书稿的整理、打印和相关插图的制作做了大量工作。回望学术研究之路,感谢我的导师杨洪苍研究员、吴报强教授的引领。回望教学之路,感谢杨孝平教授和南京理工大学各位同事的支持和帮助。感谢电子工业出版社王晓庆编辑的细致和敬业。

欢迎专家学者和读者对本书提出指正和建议,这对本书的后续修订和完善都是宝贵的财富。

孙和军

2015年7月于南京理工大学

# 目 录

第 1 章 曲线与曲面论.....	1
1.1 度量空间与欧氏空间 .....	2
1.1.1 度量空间 .....	2
1.1.2 向量空间 .....	4
1.1.3 仿射空间 .....	6
1.1.4 欧氏空间 .....	6
1.1.5 等距变换 .....	7
1.2 三维欧氏空间中的向量代数和向量分析 .....	7
1.2.1 三维欧氏空间中的向量及其运算 .....	8
1.2.2 向量函数和向量分析 .....	8
附录 1.2 笛卡儿生平及学术贡献 .....	10
1.3 曲线论概述 .....	12
1.3.1 曲线的表示 .....	12
1.3.2 空间曲线的基本三棱形 .....	14
1.3.3 曲线的曲率、挠率和费雷内公式 .....	16
附录 1.3 欧拉生平及学术贡献 .....	19
1.4 曲面论概述 .....	21
1.4.1 曲面的表示 .....	21
1.4.2 曲面的定向 .....	24
1.4.3 曲面的第一基本形式 .....	26
1.4.4 曲面的第二基本形式 .....	28
1.4.5 曲面的曲率 .....	30
附录 1.4 高斯生平及学术贡献 .....	34
1.5 基于 MATLAB 的几何图形绘制和数值计算 .....	36
1.5.1 MATLAB 用户环境介绍 .....	36
1.5.2 基于 MATLAB 的平面曲线绘制 .....	37
1.5.3 基于 MATLAB 的空间曲线绘制 .....	38
1.5.4 基于 MATLAB 的曲面绘制 .....	39
1.5.5 基于 MATLAB 的微分几何数值计算 .....	44
习题 1 .....	45
第 2 章 张量代数和外形式 .....	46
2.1 对偶空间与多重线性函数 .....	46

2.1.1	对偶空间	46
2.1.2	多重线性函数	48
2.2	张量与张量代数	49
2.2.1	张量及其表示	49
2.2.2	张量积和张量代数	50
2.2.3	张量的缩并运算	53
2.2.4	度量张量、指标的提升和下降	54
2.3	对称张量和反对称张量	55
2.3.1	对称与反对称张量	55
2.3.2	对称化与反对称化算子	57
2.4	外形式与外代数	59
2.4.1	外形式	59
2.4.2	外积	60
2.4.3	外形式空间和外代数	62
2.4.4	外形式的性质	63
	附录 2.4 嘉当生平及学术贡献	65
	习题 2	67
第 3 章	微分流形	68
3.1	拓扑学基本概念	69
3.1.1	拓扑空间	69
3.1.2	拓扑空间的子集	70
3.1.3	拓扑空间的映射	71
3.1.4	拓扑不变性	72
3.2	微分流形	74
3.2.1	拓扑流形	74
3.2.2	微分流形	75
3.2.3	微分流形的例子	76
	附录 3.2 黎曼生平及学术贡献	79
3.3	光滑映射和微分同胚	81
3.3.1	流形间的光滑映射	81
3.3.2	微分同胚	82
	附录 3.3 惠特尼生平及学术贡献	84
3.4	切向量与余切向量	85
3.4.1	切向量与切空间	85
3.4.2	余切向量和余切空间	89
3.4.3	诱导切映射和诱导余切映射	90
3.5	子流形和带边流形	92
3.5.1	浸入与嵌入	92
3.5.2	开子流形和闭子流形	95

3.5.3	嵌入定理	96
3.5.4	带边流形和闭流形	97
附录 3.5	纳什生平及学术贡献	97
习题 3		99
第 4 章	切向量场、单参数变换群与切丛	102
4.1	切向量场和泊松括号积	102
4.1.1	切向量场	103
4.1.2	李代数与泊松括号积	104
4.1.3	微分流形上的对合分布	107
4.1.4	诱导切映射与泊松括号积运算的可交换性	109
4.2	单参数变换群和李导数	109
4.2.1	单参数变换群	110
4.2.2	单参数变换群的诱导光滑切向量场	110
4.2.3	李导数	112
4.3	向量丛和切丛	113
4.3.1	向量丛	113
4.3.2	切丛和余切丛	115
附录 4.3	陈省身生平及学术贡献	118
习题 4		121
第 5 章	张量场、黎曼流形与列维-齐维塔联络	122
5.1	光滑张量场	123
5.1.1	光滑张量场	123
5.1.2	张量场的李导数	125
5.2	单位分解定理、黎曼流形和伪黎曼流形	126
5.2.1	单位分解定理	126
5.2.2	黎曼流形	126
5.2.3	伪黎曼流形	128
附录 5.2	爱因斯坦、广义相对论与黎曼几何	130
5.3	外微分式及外微分	132
5.3.1	外微分式	132
5.3.2	外微分	133
5.3.3	流形间光滑映射的诱导映射	138
5.4	仿射联络和列维-齐维塔联络	141
5.4.1	仿射联络和仿射联络空间	141
5.4.2	挠率张量和挠率形式	143
5.4.3	列维-齐维塔联络	145
5.4.4	协变微分	147
附录 5.4	列维-齐维塔生平及学术贡献	150
5.5	黎曼曲率和结构方程	151

5.5.1	平行移动和测地线	151
5.5.2	仿射联络的曲率张量和曲率形式	152
5.5.3	黎曼曲率张量、截曲率和常曲率空间	154
5.5.4	黎曼流形的结构方程	157
5.5.5	里奇曲率和数量曲率	159
5.5.6	爱因斯坦流形和卡拉比-丘流形	160
习题 5		161
第 6 章	流形上的积分、微分算子和德拉姆上同调	164
6.1	流形的定向、流形上的积分和斯托克斯定理	165
6.1.1	流形的定向	165
6.1.2	光滑流形上的积分	167
6.1.3	黎曼流形上的积分	169
6.1.4	斯托克斯定理	170
6.2	黎曼流形上的微分算子	174
6.2.1	霍奇星算子	175
6.2.2	散度算子和梯度算子	176
6.2.3	余微分算子	179
6.3	霍奇-德拉姆算子、拉普拉斯-贝尔特拉米算子及其特征值	182
6.3.1	霍奇-德拉姆算子和拉普拉斯-贝尔特拉米算子	183
6.3.2	拉普拉斯算子的特征值	187
附录 6.3	贝尔特拉米生平及学术贡献	190
6.4	德拉姆上同调和霍奇分解定理	192
6.4.1	德拉姆上同调	192
6.4.2	霍奇分解定理及其应用	193
6.4.3	庞加莱对偶定理	195
附录 6.4	德拉姆生平及学术贡献	197
习题 6		199
名词索引		201
人名索引		208
参考文献		213

# 曲线与曲面论

算术符号是书写出来的图形，而几何图形是绘画出来的公式。

——希尔伯特

古典微分几何起源于将微积分应用于几何对象的研究中，欧氏空间中的曲线和曲面是古典微分几何的主要研究对象。18 世纪初，英国数学家牛顿（I. Newton, 1643—1727 年）和德国数学家莱布尼兹（G. H. Leibniz, 1646—1716 年）发明了微积分，这为数学研究提供了新的思想和工具。人们开始用微积分来研究曲线和曲面这样的几何对象，微分几何得以创立和发展起来。在此之后到德国数学家黎曼创立黎曼几何为止，都属于古典微分几何时期。欧拉、蒙日、高斯等被公认是古典微分几何的奠基人。

1766 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707—1783 年）出版了《关于曲面上曲线的研究》，这是微分几何发展史上的一个里程碑。法国数学家蒙日（G. Monge, 1746—1818 年）将微积分应用到曲线和曲面的研究中。1807 年，蒙日出版了《分析在几何中的应用》（*Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'Ecole impériale polytechnique*），对此前微分几何中的许多结果做了较为系统的整理。这是最早的一本微分几何专门教材，它在当时传播微分几何的过程中发挥了重要作用，该书前后共印了 5 版，一直发行到蒙日去世 40 多年后。

1827 年，德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777—1855 年）发表了具有标志意义的论文《关于曲面的一般研究》（*Disquisitiones circa superficies curvas*）。这篇论文的结果奠定了近代形式曲面论的理论基础。他还获得了如下著名的高斯绝妙定理（Theorema Egregium）：曲面的高斯曲率被第一基本形式所完全决定。这一定理的重要性在于：在前人对微分几何研究了 150 年之后，高斯第一次发现了仅依赖于第一基本形式的几何量和性质，这是微分几何中的根本性内容。以此为开端，内蕴几何学（intrinsic geometry）得以发展起来。从现代微分几何的观点来看，曲面的第一基本形式就是其度量。因此，从某种意义上来说，这也为后来建立在度量基础之上的黎曼几何等现代微分几何的创立和发展奠定了基础。

本章的目的是帮助读者掌握古典微分几何中的主干内容，以便为后续微分流形等有关概念和结果的学习奠定基础。在本章中，我们将用公理化的方法建立欧氏空间和欧氏向量空间的概念，介绍向量的代数运算与向量分析的基本概念和性质。然后着重介绍古典微分几何的主体知识——曲线论和曲面论，说明如何利用微积分的思想和工具来研究这两类低维几何对象的性质。本章内容以高斯绝妙定理这一古典微分几何中的重要结果作为结束。因为三维欧氏空间中的几何对象具有直观性，所以本章的学习将为后续微分流形的抽象概念和结果提供具体的实例和模型。

## 1.1 度量空间与欧氏空间

生活在公元前三世纪亚历山大城的古希腊几何学家欧几里得 (Euclid, 公元前 325—265 年) 被公认为是几何学之父。在《几何原本》(Elements) 这本不朽著作中, 他将一些确定的基本命题作为公理, 用演绎推导的公理化办法获得其他结论, 形成一套逻辑严密的知识体系, 欧氏几何也得以创立发展起来。欧氏几何和公理化方法是几何学、现代数学和科技发展的基石。两千多年来, 《几何原本》被翻译成多种语言, 据统计, 已经有 2000 多个版本问世。它一直被视为学习几何学最好的入门教科书。在西方世界, 它的发行量仅次于《圣经》, 堪称是数学的圣经。《几何原本》的最早中文译者、明朝数学家徐光启 (1562—1633 年) 曾这样评价此书: “此书有三至三能: 似至晦, 实至明, 故能以其明明他物之至晦; 似至繁, 实至简, 故能以其简简他物之至繁; 似至难, 实至易, 故能以其易易他物之至难。易生于简, 简生于明, 综其妙在明而已。”这当然也可看成是对欧氏几何的评价。美国物理学家爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955 年) 也曾这样描述他在 12 岁时接触到《几何原本》和欧氏几何的震撼: “那种清澈和确定的感觉, 让我留下了难以形容的印象。”高维欧氏空间是推广几何研究对象的基础。

本节中, 我们先介绍度量空间的定义和例子, 然后利用公理化的方法建立向量空间、欧氏向量空间、仿射空间和欧氏空间的概念。

### 1.1.1 度量空间

19 世纪末, 德国数学家康托尔 (G. F. L. P. Cantor, 1845—1918 年) 创立了集合论, 为各种抽象空间的建立、点集拓扑学的发展奠定了基础。度量空间的概念最早出现于法国数学家弗雷歇 (M. Fréchet, 1878—1973 年) 在 1906 年提交的名为 *Sur quelques points du calcul fonctionnel* 的博士论文中。弗雷歇发现许多分析学的结果都涉及函数间的距离关系, 由此抽象出度量空间的概念, 奠定了抽象空间的理论基础。

**定义 1.1.1 (直积)** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个集合, 称:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n X_i &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i=1, 2, \dots, n\}\end{aligned}$$

为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的笛卡儿积 (Cartesian product), 也称为直积 (direct product), 称  $x_i$  为  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$  的第  $i$  个坐标。特别地,  $n$  个集合  $X$  的直积  $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{个}}$  记为  $X^n$ 。

**【例 1.1.1】** 设  $S^1$  为单位圆,  $I=[0,1]$ , 则直积  $S^1 \times I$  表示以  $S^1$  为底、 $I$  为高的圆柱面上的点构成的集合。

度量空间是一种特殊的拓扑空间, 其定义如下。

**定义 1.1.2 (度量空间)** 设  $X$  为非空集合, 称映射  $d: X \times X \rightarrow R$  为  $X$  上的一个度量 (metric), 若  $\forall x, y, z \in X$ , 有:

- (1) 非负性:  $d(x, y) \geq 0$ , 并且等号成立当且仅当  $x = y$ ;
- (2) 对称性:  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (3) 三角不等式:



$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (1.1.1)$$

称  $(X, d)$  为度量空间 (metric space), 简记为  $X$ 。称  $d(x, y)$  为空间  $(X, d)$  中点  $x$  和  $y$  之间的距离 (distance)。

我们也可以将性质 (1) 拆成: (4)  $d(x, y) \geq 0$ ; (5)  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ 。另外, (4) 可由性质 (2)、性质 (3) 和 (5) 推出:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x) = 0$$

空间的几何性质依赖于其上的度量, 不同的度量造就了不同的几何学, 例如, 黎曼几何、伪黎曼几何、罗氏几何、芬斯勒几何。

**【例 1.1.2】** 设  $R^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in R\}$ ,  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ , 定义:

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = y \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } x \neq y \text{ 时} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (1.1.3)$$

$$d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i| | i = 1, \dots, n\} \quad (1.1.4)$$

$$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.1.5)$$

验证可知  $d_i$  都为  $R^n$  上的度量。称  $d_0$  为  $R^n$  上的离散度量, 称  $d_1$  为  $R^n$  上的常用度量, 称  $(R^n, d_1)$  为  $n$  维欧氏空间, 简记为  $R^n$ 。

**【例 1.1.3】** 设  $R^\infty = \left\{ (x_1, \dots, x_n) | x_i \in R, \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty \right\}$ , 定义映射  $d: R^\infty \times R^\infty \rightarrow R$  为:  $\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in R^\infty$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \quad (1.1.6)$$

验证可知  $d$  为  $R^\infty$  上的度量, 称  $(R^\infty, d)$  为希尔伯特空间 (Hilbert space), 简记为  $R^\infty$ 。

希尔伯特空间是有限维欧氏空间的一个推广。它以德国数学家希尔伯特 (D. Hilbert, 1862—1943 年) 的名字命名。20 世纪初, 希尔伯特和施密特 (E. Schmidt, 1876—1959 年) 对积分方程 (Integral Equations) 进行了研究。在此过程中, 希尔伯特研究了希尔伯特空间。值得一提的是, 希尔伯特对康托尔的集合论给予了支持和捍卫。希尔伯特曾说: “没有人能够把我们康托尔建立的乐园中赶出去。” 在 1929 年出版的关于无界自伴算子的著作 *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren* (Mathematische Annalen, 1929, 102: 49–131) 中, 美国数学家冯·诺伊曼 (J. Von Neumann, 1903—1957 年) 最早使用了“希尔伯特空间” (Hilbert Space) 这个名词。

**定义 1.1.3 (邻域)** 设  $(X, d)$  为度量空间,  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in X$ , 称  $X$  的子集  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$  为  $(X, d)$  的以  $x$  为中心,  $\varepsilon$  为半径的邻域 (neighborhood) 或开球。

**【例 1.1.4】** 在例 1.1.2 中, 度量空间  $(R^2, d_i)$  的以  $O$  为中心、1 为半径的邻域  $B_i(0, 1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。它们的图形如图 1.1.1 所示。而  $B_0(0, 1)$  由原点构成独点集。

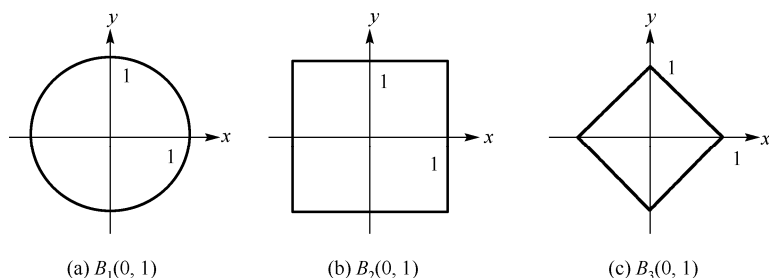


图 1.1.1 邻域的图形

**定义 1.1.4 (开集)** 设  $B$  为度量空间  $(X, d)$  的所有邻域构成的集合,  $A \subset X$ , 若存在  $B_0 \subset B$ , 使得  $A = \bigcup_{B \in B_0} B$ , 则称  $A$  为度量空间  $(X, d)$  的开集 (open set)。度量空间  $(X, d)$  的所有开集构成的集簇记为  $\tau_d$ 。

我们可以在度量空间上定义连续映射。

**定义 1.1.5 (连续映射)** 设  $(X, d)$  与  $(Y, \tilde{d})$  为两个度量空间, 若映射  $f: X \rightarrow Y$ ,  $x \in X$  满足:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得: 当  $d(x, y) < \delta$  时, 有  $\tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , 则称映射  $f$  在  $x$  处连续。若映射  $f$  在  $X$  的每一点  $x$  处都连续, 则称  $f: X \rightarrow Y$  为连续映射 (continuous mapping)。

## 1.1.2 向量空间

**定义 1.1.6 (向量空间)** 数域  $F$  上的向量空间 (vector space) 是指交换群  $V$ , 其上的群运算加法与数乘运算满足:  $\forall \lambda, \mu \in F, \vec{u}, \vec{v} \in V$ , 有:

- (1)  $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ ,  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ ;
- (2)  $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$ ;
- (3)  $1\vec{v} = \vec{v}$ 。

**定义 1.1.7 (向量空间的基底)** 设  $V$  是数域  $F$  上的一个向量空间,  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  是向量空间中  $V$  的一组线性无关的向量, 若  $V$  中的任一个向量  $\vec{v}$  都可以被  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  线性表出, 即存在  $a^1, \dots, a^n \in F$ , 使得:

$$\vec{v} = a^1\vec{v}_1 + \dots + a^n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^n a^i\vec{v}_i \quad (1.1.7)$$

则称  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  为向量空间  $V$  的一组基底 (basis), 记为  $\{v_i\}$ 。同时, 称向量空间  $V$  的维数 (dimension) 是  $n$ , 记为  $\dim V = n$ 。

当向量空间  $V$  取定基底  $\{v_i\}$  后,  $V$  中的向量  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a^i\vec{v}_i$  就与  $n$  元数组  $(a^1, \dots, a^n)$  建立了一一对应。换句话说,  $n$  维向量空间与这些  $n$  元数组所构成的集合同构。我们称  $(a^1, \dots, a^n)$  是向量  $\vec{v}$  在基底  $\{v_i\}$  下的坐标。

按照著名的爱因斯坦求和约定 (Einstein summation convention), 式 (1.1.7) 可以记为  $\vec{v} = a^i\vec{v}_i$ , 即同一指标在乘积的上、下指标中同时出现两次, 就表示要关于该指标对所有可能的值求和。在本书的相关部分, 我们将不加指明地使用爱因斯坦求和约定来表示相关和式。

**【例 1.1.5】** 设  $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, -2, 1)$  是三维向量空间  $V$  的一组基底, 求向量  $\vec{v} = (3, 3, 6)$  在该组基底下的坐标。

解: 设  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a^i \vec{v}_i$ , 则

$$(3, 3, 6) = (a^2 - a^3, a^1 - a^2 - 2a^3, a^1 + 2a^2 + a^3)$$

解方程组可得  $a^1 = 3$ ,  $a^2 = 2$ ,  $a^3 = -1$ 。所以, 向量  $\vec{v} = (3, 3, 6)$  在该组基底下的坐标是  $(3, 2, -1)$ 。

**定义 1.1.8 (欧氏向量空间)** 对给定的向量空间  $V$ , 定义映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow R$ , 使其满足:  $\forall \lambda \in F, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v} \in V$ , 有:

(1) 线性:

$$\langle \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v} \rangle + \lambda \langle \vec{v}_2, \vec{v} \rangle \quad (1.1.8)$$

(2) 对称性:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle \quad (1.1.9)$$

(3) 正定性:  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$  并且等号成立当且仅当  $\vec{v} = 0$ ;

则称  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为向量空间  $V$  上的欧氏内积 (Euclidean inner product)。指定了欧氏内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  的向量空间  $V$  上的欧氏内积称为欧氏向量空间 (Euclidean vector space), 记为  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 。我们也将向量空间  $V$  上的欧氏内积记为  $g(\cdot, \cdot)$ 。

利用内积, 我们可在向量空间  $V$  上引入模或范数 (norm), 即对  $\forall \vec{v} \in V$ , 定义向量  $\vec{v}$  的模为:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

模为 1 的向量称为单位向量。若向量  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  满足  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , 则称向量  $\vec{u}$  和  $\vec{v}$  是正交的 (orthogonal)。

**定义 1.1.9 (单位正交基底)** 若欧氏向量空间  $V$  的一组基底  $\{\vec{e}_i\}$  满足:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \quad (1.1.10)$$

则称  $\{\vec{e}_i\}$  是欧氏向量空间  $V$  的单位正交基底 (orthonormal basis), 也称为规范正交基、么正基。其中,  $\delta_{ij}$  称为克罗内克符号、克氏符号、克罗内克符号函数或克罗内克  $\delta$  (Kronecker delta)。它以德国数学家克罗内克 (L. Kronecker, 1823—1891 年) 的名字命名。

设  $\{\vec{v}_i\}$  是  $n$  维欧氏向量空间  $V$  的一组基底, 令:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \\ \vec{e}_k &= \frac{\vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{e}_i, \vec{v}_k \rangle \vec{e}_i}{\left\| \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vec{e}_i, \vec{v}_k \rangle \vec{e}_i \right\|}, \quad k = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

易证  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  是欧氏向量空间  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  的一组单位正交基底。所以, 在欧氏向量空间  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  中总存在一组单位正交基底。上述构造单位正交基底的过程称为施密特正交化 (Schmidt's orthogonalization)。

### 1.1.3 仿射空间

从组成空间的元素来看, 向量空间是由向量构成的空间, 而仿射空间则是点的空间。

**定义 1.1.10 (仿射空间)** 设  $A$  为非空集合,  $V$  为  $n$  维向量空间。若存在映射: 基底  $A \times A \rightarrow V$ , 满足:

- (1)  $\forall p, q \in A, \overrightarrow{pq} \in V$ ;
- (2)  $\forall p \in A, \overrightarrow{pp} = 0 \in V^n$ ;
- (3)  $\forall p \in A, \vec{v} \in V, \exists q \in A$ , 使得:  $\overrightarrow{pq} = \vec{v}$ ;
- (4)  $\forall p, q, \vec{r} \in A, \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ ;

则称  $A$  为  $n$  维仿射空间 (affine space), 称  $V$  是与仿射空间  $A$  伴随的向量空间。

粗略地说, 向量空间的几何化是仿射空间, 仿射空间的代数化是向量空间。

定义 1.1.10 中的条件 (3) 表明: 取定欧氏空间  $V$  中的一个向量  $\vec{v}$  后, 仿射空间  $A$  中的所有点都可以根据条件 (3) 利用  $\vec{v}$  找到一个对应点, 使得这两点通过映射映为  $\vec{v}$ 。对仿射空间  $A$  而言, 向量空间  $V$  中的向量  $\vec{v}$  给出了仿射空间  $A$  到自身的一个变换。我们称其为向量  $\vec{v}$  在仿射空间  $A$  中决定的平行移动。

条件 (3) 还表明: 在仿射空间  $A$  中, 过直线  $L$  外一点  $p$ , 能且只能作一条直线与直线  $L$  平行。这一条件与欧几里德平行公设的要求是一致的。

**定义 1.1.11 (仿射空间的基底)** 设  $A$  为与  $n$  维向量空间  $V$  伴随的仿射空间,  $\forall o \in A, p \in A$ , 有  $\overrightarrow{oq} \in V^n$ 。若存在  $V$  的一组基  $\{\delta_i\}$ , 使得:  $\forall p \in A$ , 有:

$$\overrightarrow{oq} = \sum_{i=1}^n a^i \delta_i = a^i \delta_i \quad (1.1.12)$$

则称  $\{\delta_i\}$  为  $A$  的一组基, 称  $(o, \{\delta^i\})$  为仿射空间  $A$  的一个坐标系 (coordinate system) 或标架 (frame), 称  $(a^1, \dots, a^n)$  为点  $p$  在坐标系  $(o, \{\delta^i\})$  下的坐标。

特别地, 若  $V^n$  为欧氏向量空间, 可取  $\{\delta_i\}$  为单位正交基底。

### 1.1.4 欧氏空间

**定义 1.1.12 (欧氏空间)** 称与  $n$  维欧氏向量空间  $V$  伴随的仿射空间  $A$  为欧氏空间 (Euclidean space), 记为  $E^n$ 。若  $\{\delta_i\}$  为向量空间  $V$  中的单位正交基, 则称  $\{o, \delta_i\}$  为欧氏空间  $E^n$  的一个单位正交标架, 相应的坐标系称为欧氏空间  $E^n$  的笛卡儿坐标系 (Cartesian coordinate system)。

**定义 1.1.13 (欧氏空间中两点间的距离)** 欧氏空间  $E^n$  中任意两点  $p$  和  $q$  之间的距离定义为:

$$d(p, q) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \right\rangle} \quad (1.1.13)$$

称  $d$  为  $E^n$  上的距离函数 (distance function)。

$E^n$  关于距离函数  $d$  构成度量空间。

**【例 1.1.6】** 设  $\{o, \delta_i\}$  为欧氏空间  $E^n$  的一个单位正交标架, 点  $p$  和  $q$  的坐标分别为  $(a^1, \dots, a^n)$  和  $(b^1, \dots, b^n)$ , 则  $\overrightarrow{pq} = \sum_{i=1}^n (b^i - a^i) \delta_i$ 。从而, 有:

$$d(p, q) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b^i - a^i)^2} \quad (1.1.14)$$

**【例 1.1.7】**  $n$  维向量空间  $V$  可看作一个  $n$  维仿射空间  $A$ 。事实上, 令  $A = V$ , 这样  $A$  中的元素就是所谓的“点”, 但实质上是向量空间  $V$  中的向量。  $\forall v_1, v_2 \in A$ , 令  $\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1$ 。验证可知: (1)  $\forall v \in V^n$ , 有  $\overrightarrow{vv} = v - v = 0$ ; (2)  $\forall v_1 \in A, v \in V^n$ , 存在唯一的  $v_2 = v_1 + v \in A$ , 使得  $\overrightarrow{v_1 v_2} = v_2 - v_1 = v$ ; (3)  $\forall v_1, v_2, v_3 \in A, \overrightarrow{v_1 v_2} + \overrightarrow{v_2 v_3} = v_3 - v_1 = \overrightarrow{v_1 v_3}$ 。

在  $n$  维欧氏空间中取定一个单位正交标架  $\{o, \delta_i\}$  之后,  $E^n$  便等同于  $R^n$ 。

### 1.1.5 等距变换

将欧氏空间  $E^n$  中的全体单位正交标架构成的集合记为  $P$ 。取定  $E^n$  中的一个单位正交标架  $\{o, \delta_i\}$ , 则  $P$  中的任一元素  $\{p, e_i\}$  可表示为:  $\overrightarrow{op} = \sum_i a^i \delta_i, e_i = \sum_j a_i^j \delta_j$ 。那么, 矩阵  $(a_i^j)$  必为正交阵。这样, 集合  $P$  就与  $R^n \times O(n)$  建立了一一对应关系。换句话说, 集合  $P$  中的元素与欧氏空间  $E^n$  到自身的等距变换是一一对应的。

设  $\sigma: E^n \rightarrow E^n$  为欧氏空间  $E^n$  上的一个等距变换 (isometric transformation), 即对  $\forall p, q \in E^n$ , 有:

$$d(\sigma(p), \sigma(q)) = d(p, q) \quad (1.1.15)$$

设  $\sigma$  将单位正交标架  $\{o, \delta_i\}$  变为另一个单位正交标架  $\{p, e_i\}$ , 即  $\sigma(o) = p, \overrightarrow{op} = \sum_i a^i \delta_i, e_i = \sum_j a_i^j \delta_j$ 。对  $\forall q \in E^n, q$  关于坐标系  $\{o, \delta_i\}$  的坐标为  $\overrightarrow{oq} = \sum_i \lambda^i \delta_i$ , 则  $q' = \sigma(q)$  关于标架  $\{p, e_i\}$  的坐标与  $q$  关于标架  $\{o, \delta_i\}$  的坐标是相同的。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{oq'} &= \overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq'} = \sum_i a^i \delta_i + \sum_i \lambda^i e_i \\ &= \sum_i a^i \delta_i + \sum_i \lambda^i \sum_j a_i^j \delta_j = \sum_i (a^i + \lambda^i a_i^i) \delta_i \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

从而,  $q' = \sigma(q)$  关于标架  $\{o, \delta_i\}$  的坐标为:

$$\mu^i = a^i + \sum_j \lambda^j a_j^i \quad (1.1.17)$$

为方便起见, 我们以后将对  $E^n$  与  $R^n$  不加区分, 用  $R^n$  表示  $n$  维欧氏空间。

## 1.2 三维欧氏空间中的向量代数和向量分析

通过引入直角坐标系, 笛卡儿极大地拓广了数学的研究对象, 为后人在微积分上的工作提供了坚实的基础, 而后者又是现代数学的重要基石。同时, 这也为我们提供了一种重要的数学思想方法。微分几何的主要研究对象包括点、向量、曲线、曲面、流形等。它们都是比较感性的。而数的运算无疑是简单的、理性的。基于此, 一种重要的数学思想方法是将几何问题转化为代数问题来处理, 这就是几何的代数化。在三维欧氏空间中建立笛卡儿坐标系后,

我们可以将最简单的几何对象——空间中的点与三元数组建立一一对应。而两点间的有向线段就是向量。这样，向量也就有了坐标，我们可以对其进行分析。进而，我们可以用向量作为工具来研究曲线和曲面。在本节中，我们将从代数和分析的角度处理  $R^3$  中的向量，主要介绍向量代数运算和向量分析的基本概念和性质。

### 1.2.1 三维欧氏空间中的向量及其运算

如图 1.2.1 所示，在三维欧氏空间  $R^3$  中建立笛卡儿直角坐标系，设  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  为  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴正向的单位向量。这样，向量  $\vec{a}$  可以表示为：

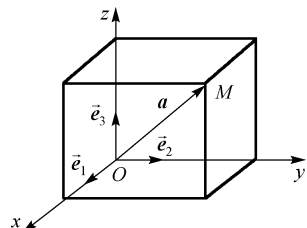


图 1.2.1 笛卡儿直角坐标系

式中， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  称为基向量 (basis vector) 或基底向量。

$$\vec{a} = \{x, y, z\} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (1.2.1)$$

借助坐标，我们可以进行向量的运算。除了加法和减法外，我们还可以定义向量的数量积、向量积和混合积。

定义 1.2.1 (向量的数量积、向量积和混合积) 设向量  $\vec{a}, \vec{b}$  和  $\vec{c}$  的坐标分别为  $\{x_1, y_1, z_1\}$ 、 $\{x_2, y_2, z_2\}$  和  $\{x_3, y_3, z_3\}$ ，则  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的数量积  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  定义为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (1.2.2)$$

式中， $\varphi$  为  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的夹角。数量积 (scalar product) 也称为标量积、点乘 (inner product)。欧氏空间上的标准内积就是其上向量间的数量积。

向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  的向量积  $\vec{a} \times \vec{b}$  定义为： $\vec{a} \times \vec{b}$  是垂直于  $\vec{a}, \vec{b}$  所在平面的向量，并且  $\vec{a}, \vec{b}$  和  $\vec{a} \times \vec{b}$  符合右手法则：

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \quad (1.2.3)$$

$\vec{a} \times \vec{b}$  也可以表示为：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (1.2.4)$$

向量积 (vector product) 也称为矢量积或叉积 (cross product)。

三向量  $\vec{a}, \vec{b}$  和  $\vec{c}$  的混合积 (mixed product) 定义为：

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.5)$$

根据向量的数量积、向量积和混合积的定义，我们易知有如下向量位置关系的结论：

- (1)  $\vec{a}$  垂直于  $\vec{b}$ ，当且仅当  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ；
- (2)  $\vec{a}$  平行于  $\vec{b}$ ，当且仅当  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ；
- (3) 三向量  $\vec{a}, \vec{b}$  和  $\vec{c}$  共面 (即平行于同一个平面)，当且仅当  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ 。

### 1.2.2 向量函数和向量分析

将向量代数化后，我们如何将曲线和曲面进行代数化？观察图 1.2.2 可知，曲线是由一

系列的点组成的。而曲线上的这些点与向径（以原点为起点的向量）是一一对应的。从更高的层次来看，曲线是一维流形。这样，我们就可以利用向量函数将曲线代数化。

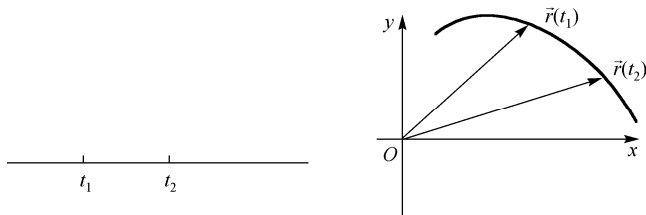


图 1.2.2 曲线

**定义 1.2.2 (向量函数)** 若点集  $G$  中的每一个点  $x$  都有唯一确定的向量  $\vec{r}$  与之对应，则在  $G$  上给出了一个向量函数 (vector function)，记为  $\vec{r} = \vec{r}(x)$ ， $x \in G$ 。也称向量函数为向量值函数 (vector-valued function)。

特别地，当  $G$  为实数轴上的区间  $[t_0, t_1]$ ，一元向量函数  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  表示曲线，其中  $t \in [t_0, t_1]$ 。当  $G$  为平面域时，二元向量函数  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  表示曲面，其中  $(u, v) \in G$ 。

这样，一元向量函数  $\vec{r}(t)$  就与三元实函数组  $\{x(t), y(t), z(t)\}$  建立了一一对应：

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3 = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (1.2.6)$$

在此基础之上，我们就可以引进一元向量函数的极限、连续性、微商和积分等概念，对向量进行分析。

**定义 1.2.3 (一元向量函数的极限和连续性)** 设  $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ， $\vec{a} = \{x_0, y_0, z_0\}$ ，若  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ ， $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$ ， $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$ ，则称一元向量函数  $\vec{r}(t)$  当  $t \rightarrow t_0$  时的极限为  $\vec{a}$ ，记为  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ 。若  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ ，则称向量函数  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  处连续 (continuous)。

由定义 1.2.3 可知，对一元向量函数求极限，等价于对其分量函数  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  求极限。借助一元向量函数极限的定义，我们可以给出一元向量函数的微商和积分的定义。

**定义 1.2.4 (一元向量函数的微商和积分)** 设  $\vec{r}(t)$  为一元向量函数，若极限  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$  存在，则称向量函数  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  处可导，称该极限为  $\vec{r}(t)$  在  $t_0$  处的微商 (导矢)，记为： $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\Big|_{t_0} = \vec{r}'(t_0)$ 。定义向量函数  $\vec{r}(t)$  在  $[a, b]$  的积分为：

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (1.2.7)$$

易知，有：

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{e}_1 + y'(t)\vec{e}_2 + z'(t)\vec{e}_3 \quad (1.2.8)$$

**定理 1.2.1** 向量函数  $\vec{r}(t)$  具有固定长度  $\Leftrightarrow$  对每一个  $t$ ，有  $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$ 。

证明： $|\vec{r}(t)|$  为常数

$$\Leftrightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|^2 = C$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dt} \vec{r}^2(t) = 2\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$$

(1.2.9)

证毕。

定义 1.2.5 (二元向量函数的偏导数) 设  $\vec{r}(u, v)$  为二元向量函数, 若极限:

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0)}{\Delta u} \quad (1.2.10)$$

存在, 则称该极限为  $\vec{r}(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  处关于  $u$  的偏导数; 类似可定义  $\vec{r}(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  处关于  $v$  的偏导数  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ 。

如果二元向量函数  $\vec{r}(u, v)$  在其定义域内关于  $u$  和  $v$  具有连续的  $k$  阶偏导数, 则称  $\vec{r}(u, v)$  是  $C^k$  的。特别地, 规定连续的二元向量函数是  $C^0$  的; 称  $C^\infty$  的二元向量函数为光滑的二元向量函数。

定义 1.2.6 (二元向量函数可微) 设  $\vec{r}(u, v)$  为二元向量函数, 若存在向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$ , 使得向量:

$$\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) - \vec{a}\Delta u - \vec{b}\Delta v \quad (1.2.11)$$

的模是  $\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$  的高阶无穷小, 则称在  $\vec{r}(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  处可微 (differentiable), 称  $d\vec{r}(u_0, v_0) = \vec{a}\Delta u + \vec{b}\Delta v$  为  $\vec{r}(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  处的微分 (differential)。

可以证明:

$$\begin{aligned} d\vec{r}(u_0, v_0) &= \vec{r}_u(u_0, v_0)\Delta u + \vec{r}_v(u_0, v_0)\Delta v \\ &= \vec{r}_u(u_0, v_0)du + \vec{r}_v(u_0, v_0)dv \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

易知, 二元向量函数也有求导的链式法则成立, 即: 设二元向量函数  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  可微, 二元函数  $u = u(s, t)$  和  $v = v(s, t)$  具有连续的偏导数, 由此可得二元向量函数  $\vec{r} = \vec{r}(u(s, t), v(s, t))$ , 则

$$\vec{r}_s = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial s} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \vec{r}_t = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.2.13)$$

## 附录 1.2 笛卡儿生平及学术贡献

勒内·笛卡儿 (R. Descartes, 1596—1650 年), 法国著名数学家、哲学家、物理学家。他是 17 世纪欧洲科学和哲学领域最有影响的大师之一, 被后人誉为解析几何之父、近代科学的始祖。



图 1.2.3 笛卡儿

笛卡儿出生在一个地位较低的贵族家庭, 幼年丧母, 从小体弱多病。但宽裕的家庭经济条件使他能够受到良好的教育并探寻自己感兴趣的事物。1618—1621 年, 笛卡儿加入了荷兰的军队。在此期间, 笛卡儿对数学与物理学产生了兴趣。他利用空闲时间来学习数学, 并在数学方面有了一些发现。1622 年退伍后, 笛卡儿先后游历过欧洲多国: 他在意大利住了两年; 之后, 他迁往巴黎; 1628 年, 他移居荷兰, 并在那里住了 20 多年; 1649 年, 笛卡儿受瑞典克里斯蒂娜女王之邀前往瑞典担任她的私人教师, 但北欧寒冷的气候和他柔弱的体质使他不幸得了肺炎。1650 年 2 月, 笛卡儿逝世于瑞典斯德哥尔摩。

笛卡儿对数学最重要的贡献是创立了解析几何。笛卡儿创新地将几何图形转译成代数方程, 从而使几何问题可以用代数方法求解, 成功地将当时完全分开的代数和几何学联系到了一起。在他 1637 年的著作《几何》(La Géométrie) 中, 笛卡儿说明了几何问题可以归结成代数问题, 也



可以通过代数转换来发现、证明几何性质。笛卡儿引入了坐标系及线段的运算概念。笛卡儿在数学上的成就为后人在微积分上的工作提供了坚实的基础，而后者又是现代数学的重要基石。1635年，他最早发现了凸多面体边、顶点和面之间的关系公式。但他的发现在此后很长的一段时间里都不为人所知。1750年，欧拉证明了这个公式，称为欧拉公式（Euler's formula）。1860年，笛卡儿的工作被后人重新发现，因此后人也把欧拉公式称为欧拉-笛卡儿公式。著名的代数曲线——笛卡儿叶形线（Folium of Descartes）也是他在1638年最早发现的。此外，现在使用的许多数学符号也都是笛卡儿最先使用的：已知数 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，未知数 $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，指数的表示方法等。

在笛卡儿的时代，拉丁文是学者的语言。笛卡儿也按照当时习惯在他的著作上签上拉丁化的名字——Renatus Cartesius（瑞那图斯·卡提修斯）。这就是英文中笛卡儿坐标系译作Cartesian coordinate system的原因。

笛卡儿创立了一套完整的哲学体系，被认为是西方现代哲学的奠基人。笛卡儿发表了《方法论》（*Discours de la méthode*, 1637年）、《形而上学的沉思》（*Meditationes de prima philosophia*, 1641年）和《哲学原理》（*Principia philosophiae*, 1644年）等多部重要的哲学著作。但在当时的欧洲，笛卡儿的哲学思想和著作一直被教会所禁止：1663年，他的著作被罗马和巴黎教会列入禁书之列。直到1740年，巴黎才解除禁令。哲学上，笛卡儿是一个理性主义者。笛卡儿认为，理性比感官的感受更可靠，数学的方法就是理性，人类应该可以使用数学的方法来进行哲学思考。他从逻辑学、几何学和代数学中发现了逻辑思考的一些方法和原则，并将这种方法运用在哲学思考和几何学上。笛卡儿的哲学思想深深影响了西方世界。例如，在笛卡儿死于瑞典后，克里斯蒂娜女王放弃了她的王位，转信罗马天主教（瑞典法律要求统治者是新教徒），而与她有联系的唯一天主教徒就是笛卡儿。后世流传着笛卡儿、克里斯蒂娜女王和心形线的一段未经考证的爱情故事。

笛卡儿在物理学方面也有很多贡献。在《屈光学》中，他首次对光的折射定律提出了理论论证，用光的折射定律解释彩虹现象。他解释了人的视力失常的原因，并设计了矫正视力的透镜。笛卡儿还发展了伽利略运动相对性的理论，发现了动量守恒原理的原始形式。他发展的宇宙演化论、漩涡说等理论学说对他之后的许多自然科学家产生了影响。



图 1.2.4 笛卡儿



图 1.2.5 笛卡儿肖像的邮票

为了纪念他，法国、摩纳哥等曾先后发行过以他的肖像和著作等为图案的邮票和钱币。笛卡儿的头骨现存于法国巴黎夏乐宫的人类博物馆。

## 1.3 曲线论概述

曲线和曲面是古典微分几何的主要研究对象。两千多年前，古希腊数学家阿波罗尼乌斯（Apollonius of Perga，约公元前 262—190 年）就开始研究圆锥曲线、圆柱螺线等曲线，著有《圆锥曲线论》八卷。18 世纪和 19 世纪，三维欧氏空间中的曲线、曲面的研究形成了微分几何发展的坚实基础。1673 年，荷兰天文学家、物理学家、数学家惠更斯（C. Huygens，1629—1695 年）发表了《关于钟摆的运动》，其中研究了平面曲线的渐屈线和渐伸线。他对悬链线、曳物线、对数螺线等也都进行过研究。1671 年，牛顿（I. Newton，1643—1727 年）引入了曲率中心的概念。1696 年，法国数学家洛必达（G. de l'Hôpital，1661—1704 年）出版了《无穷小分析及其在曲线中应用》（英文： *Infinitesimal calculus with applications to curved lines*，法语： *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*）。这是微积分方面最早的教科书，其中以清晰的形式讨论了微分，并将其应用于曲线的微分几何研究。1729 年，法国数学家、天文学家克莱罗（A. C. Clairault，1713—1765 年）完成了《关于双重曲率曲线的研究》（*Recherches sur les courbes a double courbure*）一书并于 1731 年出版，这开创了微分几何的空间曲线理论。他提出空间曲线有两个曲率的想法（即曲率和挠率），还给出了空间曲线的弧长公式和某些曲面的面积求法。欧拉在 1736 年引入了平面曲线的以弧长为坐标的内在坐标概念。之后，在《无限小分析引论中》，他又引进了曲线的参数方程表示，给出了空间曲线的曲率定义，推导出空间曲线的曲率半径表达式。1806 年，法国工程师朗克雷（M. A. Lancret，1774—1807 年）给出了空间曲线曲率的挠率表达式。1826 年，法国数学家柯西（A. L. Cauchy，1789—1859 年）在《微积分在几何中的应用》一书中，进一步澄清了空间曲线的曲率和挠率概念，并指出曲线在这两个量确定以后就被完全决定了。1847 年，法国数学家费雷内（J. F. Frenet，1816—1900 年）和赛雷特（J. A. Serret，1819—1885 年）分别在 1847 年和 1851 年各自独立得出了空间曲线的基本微分方程——费雷内公式（Frenet-Serret formula）。

在本节中，我们将概括介绍曲线的表示、曲线的基本三棱形、曲线的曲率、挠率和费雷内公式等曲线论的主体内容。曲线的概念还可以推广到抽象的流形上。在第 3 章建立微分流形的概念后，我们还将研究光滑流形上的光滑曲线。

### 1.3.1 曲线的表示

如图 1.3.1 所示，平面曲线（plane curve）和空间曲线（space curve）的一种表示方法是建立平面直角坐标系和空间坐标系，其上的点就可以分别表示为  $\{(x, y)\}$ 、 $\{(x, y, z)\}$ 。而从曲线本身来说，要区分其上点的位置都只需要一个变量参数。事实上，无论是平面曲线还是空间曲线，它们都是一维的几何对象。平面曲线的参数表示为：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a < t < b \quad (1.3.1)$$

空间曲线的参数表示为：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad a < t < b \quad (1.3.2)$$

平面曲线和空间曲线都可以用向量参数表示为:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $a < t < b$ 。

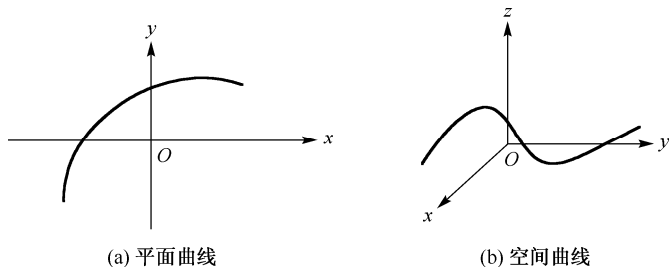


图 1.3.1 曲线

【例 1.3.1】 如图 1.3.2 所示, 根据圆柱螺线的特征, 其向量参数表示为:

$$\vec{r} = \{a \cos t, a \sin t, bt\}, \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.3.3)$$

由该参数表示也可以看出生成圆柱螺线的一动点在圆柱面上的运动过程。

**定义 1.3.1 (正则曲线)** 若曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  上的点  $\vec{r}(t_0)$  满足:  $\vec{r}'(t_0) \neq 0$ , 则称该点为曲线的正则点 (regular point)。若曲线上所有的点都是正则点, 则称该曲线为正则曲线 (regular curve)。

为方便起见, 如不加特殊说明, 我们以下考虑的都是正则曲线。

【例 1.3.2】 例 1.3.1 中的圆柱螺线是一条正则曲线。而平面曲线  $\vec{r} = \{t^3, 2t^2\}$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$  就不是一条正则曲线, 因为  $\vec{r}'(0) = 0$ 。

割线的极限位置是切线 (tangent line), 它是刻画曲线弯曲程度的参照物。下面讨论切线的方程。

设曲线的参数方程为  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , 点  $P$  所对应的参数为  $t_0$ ,  $\vec{\rho} = \{X, Y, Z\}$  是切线上任一点的向径。如图 1.3.3 所示, 我们可在  $P$  点处的切线上找到如下位置关系: 向量  $\vec{\rho} - \vec{r}(t_0)$  平行于  $\vec{r}'(t_0)$ 。由此可得曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  在参数  $t_0$  处的切线方程为:

$$\vec{\rho} - \vec{r}(t_0) = \lambda \vec{r}'(t_0) \quad (1.3.4)$$

设  $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ , 则曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  在参数  $t_0$  处的切线方程可用坐标表示为:

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)} \quad (1.3.5)$$

由切线的方程, 我们不难看出只考虑正则点和正则曲线的原因。

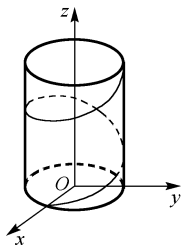


图 1.3.2 圆柱螺线

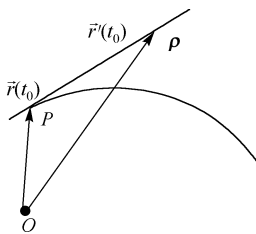
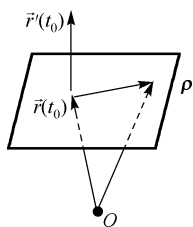


图 1.3.3 切线



过切点并与切线垂直的平面称为曲线在该点处的法平面 (normal plane)。设  $\bar{\rho} = \{X, Y, Z\}$  是法平面上任一点的向径。如图 1.3.4 所示, 我们可在  $P$  点处的法平面上找到如下位置关系: 向量  $\bar{\rho} - \bar{r}(t_0)$  垂直于  $\bar{r}'(t_0)$ 。由此可得曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  在参数  $t_0$  处的法平面的方程为:

$$[\bar{\rho} - \bar{r}(t_0)] \cdot \bar{r}'(t_0) = 0 \quad (1.3.6)$$

图 1.3.4 法平面 用坐标可以表示为:

$$x'(t_0)[X - x(t_0)] + y'(t_0)[Y - y(t_0)] + z'(t_0)[Z - z(t_0)] = 0 \quad (1.3.7)$$

考虑  $C^1$  类的曲线:  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ 。使用分割、近似代替、求和、取极限的方法, 可得曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  从  $\bar{r}(a)$  到  $\bar{r}(t)$  的弧长:

$$\sigma(t) = \int_a^t |\bar{r}'(t)| dt \quad (1.3.8)$$

注意到参数  $t$  的取值范围, 所以该积分的上限一定大于下限, 这样所得到的曲线弧长总是非负的。

下面我们在曲线弧长概念的基础上引入曲线弧长参数的概念。定义函数  $s(t)$ :

$$s(t) = \begin{cases} \sigma(t), & t > a \\ 0, & t = a \\ -\sigma(t), & t < a \end{cases} \quad (1.3.9)$$

即  $s(t) = \int_a^t |\bar{r}'(t)| dt$ 。注意此处我们已不要求该积分的上限一定大于下限。

因为  $s'(t) = |\bar{r}'(t)| > 0$ , 所以  $s(t)$  单调增加。由反函数存在定理可知,  $s(t)$  有反函数  $t = t(s)$ 。将之代入曲线方程  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ , 可得以  $s$  为参数的方程:

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \quad (1.3.10)$$

称  $s$  为曲线的自然参数或弧长参数。

因为  $ds = |\bar{r}'(t)| dt$ , 所以有:

$$ds^2 = \bar{r}'^2 dt^2 = d\bar{r}^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (1.3.11)$$

由此可得:

$$|\bar{r}'(s)| = \left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1 \quad (1.3.12)$$

### 1.3.2 空间曲线的基本三棱形

费雷内标架 (Frenet frame) 是研究曲线的最重要工具。它在曲线上的每一点处建立了一个局部坐标系, 是一个活动的标架。下面我们就来建立曲线的基本向量、密切平面、从切平面、法平面, 从而获得曲线的费雷内标架和基本三棱形。

**定义 1.3.2 (曲线的密切平面)** 过曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  上  $P$  点的切线和  $P$  点邻近一点  $Q$  可作平面  $\sigma$ , 当  $Q$  点趋向于  $P$  点时, 平面  $\sigma$  的极限位置  $\pi$  称为曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  在点  $P$  处的密切平面 (osculating plane)。

设  $\bar{R} = \{X, Y, Z\}$  为曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  在点  $P$  处的密切平面上任意一点的向径, 推导可发现如下位置关系: 三向量  $\bar{R} - \bar{r}(t_0)$ 、 $\bar{r}'(t_0)$  和  $\bar{r}''(t_0)$  共面。由此可得曲线  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  在点  $P$  处的密切平面方程为:

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0 \quad (1.3.13)$$

用坐标表示为:

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & Y - y(t_0) & Z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.14)$$

特别地, 若曲线为平面曲线, 则其密切平面就是其所在的平面。

**定义 1.3.3 (曲线的费雷内标架)** 注意到向量  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  为单位向量, 称向量  $\vec{\alpha}$  为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的单位切向量。因为  $|\vec{\alpha}| = 1$ , 所以  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2 = 1$ 。故  $2\dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\alpha} = 0$ , 即  $\dot{\vec{\alpha}} \perp \vec{\alpha}$ 。称单位向量  $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|}$  为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的主法向量 (principal normal vector)。称  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$  为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的副法向量 (binormal vector)。单位向量  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  统称为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的基本向量 (basic vector)。由曲线在点  $P$  处的基本向量所构成的标架称为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的费雷内标架。

如图 1.3.5 所示, 由基本向量可确定三个平面, 其中两个是密切平面和法平面。事实上, 因为  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{r}}$ ,  $\vec{\beta}$  平行于  $\ddot{\vec{r}}$ , 所以根据密切平面的特征可知: 由曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的基本向量  $\vec{\alpha}$  和  $\vec{\beta}$  所确定的平面就是曲线在点  $P$  处的密切平面。而  $\vec{\beta}$  和  $\vec{\gamma}$  所在的平面为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的法平面。

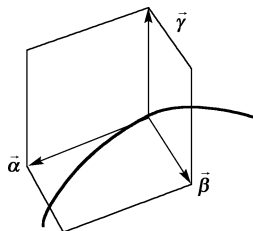


图 1.3.5 基本三棱形

由  $\vec{\alpha}$  和  $\vec{\gamma}$  所确定的平面称为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的从切平面 (rectifying plane)。我们把由基本向量、密切平面、从切平面、法平面所构成的图形称为曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的基本三棱形 (fundamental three-vector form)。

**【例 1.3.3】** 写出圆柱螺线  $\vec{r} = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$  的自然参数方程, 并求其切向量、主法向量和副法向量。

**解:** 因为

$$\vec{r}'(t) = \{-a \sin t, a \cos t, b\}$$

所以圆柱螺线的弧长:

$$s = \int_0^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

故  $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。将其代入圆柱螺线的方程, 有:

$$\vec{r} = \left\{ a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\} \quad (1.3.15)$$

所以, 切向量为:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left\{ -a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right\} \quad (1.3.16)$$

同时有:

$$\dot{\vec{\alpha}} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{a}{a^2+b^2} \left\{ \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right\} \quad (1.3.17)$$

这样，主法向量和副法向量分别为：

$$\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|} = -\left\{ \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right\} \quad (1.3.18)$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left\{ b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \right\} \quad (1.3.19)$$

### 1.3.3 曲线的曲率、挠率和费雷内公式

为了定量地刻画曲线的形态，需要引入曲线的曲率（curvature）和挠率（torsion）的概念。先来考查如何刻画曲线的弯曲特性。如图 1.3.6 所示，曲线弯曲程度越大，其切向量的方向改变得越快。因此，可用曲线在一点处的切向量变化率来刻画曲线在该点处的弯曲程度。

**定义 1.3.4（曲线的曲率）** 曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在点  $P$  处的曲率定义为：

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \quad (1.3.20)$$

即

$$\kappa(s) = |\dot{\vec{\alpha}}| = |\ddot{\vec{r}}| \quad (1.3.21)$$

与平面曲线不同的是：空间曲线除了弯曲的特性外，它还有扭转（离开密切曲面）的特性。如图 1.3.7 所示，可以用曲线在一点处的法向量变化率来刻画曲线在该点处的扭转程度。

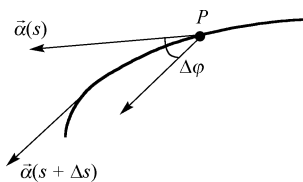


图 1.3.6 曲线的变曲程度

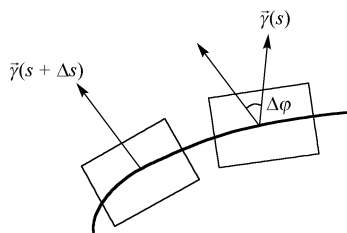


图 1.3.7 曲线的扭转程度

为了建立刻画曲线扭转程度的挠率概念，先来研究向量  $\dot{\vec{\gamma}}$  与向量  $\vec{\beta}$  的位置关系。为此，对  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta}$  求微商，有：

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\gamma}} &= (\vec{\alpha} \times \dot{\vec{\beta}}) = \dot{\vec{\alpha}} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \dot{\vec{\beta}} \\ &= \kappa(s) \vec{\beta} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \dot{\vec{\beta}} = \vec{\alpha} \times \dot{\vec{\beta}} \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

式中， $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{\gamma}}}{|\dot{\vec{\gamma}}|} = \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|} = \frac{\dot{\vec{\alpha}}}{\kappa(s)}$ 。所以，有：

$$\dot{\vec{\alpha}} = \kappa(s) \vec{\beta} \quad (1.3.23)$$

并且由式 (1.3.22) 可知:  $\dot{\vec{\gamma}}$  垂直于  $\vec{\alpha}$ 。同时注意到  $\dot{\vec{\gamma}}$  垂直于  $\vec{\gamma}$ , 由此可知  $\dot{\vec{\gamma}}$  平行于  $\vec{\beta}$ 。

**定义 1.3.5 (曲线的挠率)** 曲线  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  在  $P$  点的挠率:

$$\tau(s) = \begin{cases} |\dot{\vec{\gamma}}|, & \dot{\vec{\gamma}} \text{ 与 } \vec{\beta} \text{ 异向} \\ -|\dot{\vec{\gamma}}|, & \dot{\vec{\gamma}} \text{ 与 } \vec{\beta} \text{ 同向} \end{cases} \quad (1.3.24)$$

根据挠率的定义可知:

$$\dot{\vec{\gamma}} = -\tau(s)\vec{\beta} \quad (1.3.25)$$

下面我们再对  $\vec{\beta} = \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$  求微商, 有:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\beta}} &= \dot{\vec{\gamma}} \times \vec{\alpha} + \vec{\gamma} \times \dot{\vec{\alpha}} = -\tau(s)\vec{\beta} \times \vec{\alpha} + \vec{\gamma} \times \kappa(s)\vec{\beta} \\ &= \tau(s)\vec{\gamma} - \kappa(s)\vec{\alpha} \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

综合式 (1.3.23)、式 (1.3.25) 和式 (1.3.26), 有空间曲线的费雷内公式:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\alpha}} = \kappa(s)\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} = -\kappa(s)\vec{\alpha} + \tau(s)\vec{\gamma} \\ \dot{\vec{\gamma}} = -\tau(s)\vec{\beta} \end{cases} \quad (1.3.27)$$

费雷内公式给出了对基本向量  $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$  和  $\vec{\gamma}$  求微商的结果。该微分方程组的系数矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.28)$$

是反对称矩阵。

下面来推导曲线的曲率、挠率在一般参数下的计算公式。

**定理 1.3.1** 曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  曲率和挠率有如下计算公式:

$$\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} \quad (1.3.29)$$

和

$$\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2} \quad (1.3.30)$$

证明: 因为

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{\vec{r}} \frac{ds}{dt} \quad (1.3.31)$$

和

$$\vec{r}'' = (\dot{\vec{r}})' \frac{ds}{dt} + \dot{\vec{r}} \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\vec{r}} \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.3.32)$$

所以

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \quad (1.3.33)$$

向量  $\vec{r}' \times \vec{r}''$  的模为:

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = |\dot{\vec{r}}| |\ddot{\vec{r}}| \sin \theta \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \quad (1.3.34)$$

式中,  $\theta$  为向量  $\vec{r}'$  与  $\vec{r}''$  的夹角。而  $|\dot{\vec{r}}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$ , 所以  $\dot{\vec{r}} \perp \ddot{\vec{r}}$ 。又注意到  $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'|$  和  $|\ddot{\vec{r}}| = |\ddot{\alpha}| = \kappa(s)$ , 所以有:

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \kappa |\vec{r}'|^3 \quad (1.3.35)$$

即曲线  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  曲率有式 (1.3.29) 成立。

因为  $\dot{\vec{\gamma}} = -\tau(s)\vec{\beta}$ , 所以:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\dot{\vec{\gamma}} \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} \cdot \dot{\vec{\beta}} = (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \left( \frac{1}{\kappa(s)} \dot{\vec{\alpha}} \right) \\ &= \left( \vec{\alpha} \times \frac{1}{\kappa} \dot{\vec{\alpha}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{1}{\kappa(s)} \right) \dot{\vec{\alpha}} + \frac{1}{\kappa(s)} \ddot{\vec{\alpha}} \right] = \left( \vec{r} \times \frac{1}{\kappa} \ddot{\vec{r}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{1}{\kappa} \right) \ddot{\vec{r}} + \frac{1}{\kappa} \dddot{\vec{r}} \right] \\ &= \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{\kappa^2} = \frac{|\vec{r}'|^6 (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2} \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

对式 (1.3.32) 求微商可得:

$$\begin{aligned} \vec{r}''' &= \ddot{\vec{r}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 2\ddot{\vec{r}} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \ddot{\vec{r}} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \dot{\vec{r}} \frac{d^3s}{dt^3} \\ &= \ddot{\vec{r}} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3\ddot{\vec{r}} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \dot{\vec{r}} \frac{d^3s}{dt^3} \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

利用式 (1.3.31)、式 (1.3.32) 和式 (1.3.37), 我们可得:

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = |\vec{r}'|^6 (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) \quad (1.3.38)$$

将式 (1.3.38) 所得的计算结果代入式 (1.3.36), 可得式 (1.3.30)。证毕。

**【例 1.3.4】** 计算圆柱螺线  $\vec{r} = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$  的曲率和挠率。

解: 因为

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \{-a \sin t, a \cos t, b\} \\ \vec{r}'' &= \{-a \cos t, -a \sin t, 0\} \\ \vec{r}''' &= \{a \sin t, -a \cos t, 0\} \end{aligned}$$

所以有:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \{ab \sin t, -ab \cos t, a^2\} \quad (1.3.39)$$

$$(\vec{r}, \vec{r}'', \vec{r}''') = a^2 b \quad (1.3.40)$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1.3.41)$$

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} \quad (1.3.42)$$

将式 (1.3.41) 和式 (1.3.42) 代入式 (1.3.29), 计算可得曲率为:

$$\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (1.3.43)$$

将式 (1.3.40) 和式 (1.3.42) 代入式 (1.3.30), 可得挠率为:



$$\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (1.3.44)$$

另外, 利用例 1.3.3 中的式 (1.3.18) 和式 (1.3.19), 我们可以计算出  $\dot{\vec{\beta}}$  和  $\dot{\vec{\gamma}}$ 。然后, 利用式 (1.3.43) 和式 (1.3.44) 验证圆柱螺线的费雷内公式成立。

**【例 1.3.5】** 求证: 曲率恒等于零的曲线为直线。

**证明:** 因为  $0 = \kappa(s) = \left| \ddot{\vec{r}} \right| = \left| \ddot{\vec{r}} \right|$ , 所以  $\ddot{\vec{r}} = 0$ 。由此可得  $\dot{\vec{r}} = \vec{a}s + \vec{b}$ , 其中  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  为两个常向量。证毕。

**【例 1.3.6】** 求证: 挠率恒等于零的曲线为平面曲线。

**证明:** 我们先来分析一下平面曲线的特征。若曲线  $\vec{r}$  是在以  $\vec{n}$  为法向量的平面上的一条平面曲线, 曲线上任一点对应的向径  $\vec{r}$  与其上一固定点对应向径  $\vec{r}_0$  的差向量  $\vec{r} - \vec{r}_0$  与法向量  $\vec{n}$  垂直。根据这一位置关系, 我们有  $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$ , 即  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = c$ , 其中  $c$  为常数。这就是平面曲线的特征。

若  $\tau = 0$ , 则  $\dot{\vec{\gamma}} = -\tau(s)\vec{\beta} = 0$ , 所以,  $\vec{\gamma}$  为固定向量。又因为  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$ , 即  $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\gamma} = 0$ , 两边积分, 有  $\vec{r} \cdot \vec{\gamma} = b$ , 其中  $b$  为常数。根据平面曲线的特征可知, 挠率恒等于零的曲线为平面曲线。证毕。

曲线的曲率和挠率是刻画曲线空间形态的两个重要基本量。事实上, 我们有如下定理。

**定理 1.3.2 (曲线论基本定理)** 曲线的形状由它的曲率和挠率所完全确定。

## 附录 1.3 欧拉生平及学术贡献

莱昂哈德·欧拉 (L. Euler, 1707—1783 年), 瑞士数学家、自然科学家。他与阿基米德 (Archimedes, 公元前 287—212 年)、牛顿和高斯齐名, 是数学史上公认的 4 位最伟大的数学家之一。他一生的大部分时间是在俄国和德国普鲁士度过的。

欧拉是第一个在平面曲线微分几何研究方面做出重要贡献的人: 1736 年, 他引进了平面曲线的弧长概念, 由此开始了平面曲线的微分几何研究。他还引入了空间曲线的参数方程, 给出了空间曲线的曲率半径的解析表达式。1744 年, 欧拉出版了《一种寻找具有某种极大或极小性质曲线的方法》(原标题: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, 英文翻译标题: *A method for finding curved lines enjoying properties of maximum or minimum, or solution of isoperimetric problems in the broadest accepted sense*)。这本书 (如图 1.3.9 所示) 是变分法诞生的标志。欧拉在曲面论研究方面也做出了重要贡献: 他用微分方程的解定义了测地线 (geodesic), 并说明了测地线是质点在曲面上无外力作用时的运动轨迹。1760 年, 他出版了《关于曲面上曲线的研究》。这篇著作是古典微分几何发展史上的一个里程碑。

欧拉是数学史上最多产的数学家之一。欧拉的数学研究成果涉及分析、几何、代数等多



图 1.3.8 欧拉

个领域，而且在许多领域的工作都是开创性、创新性的。他一生共写了 866 本书和论文。他撰写的《无穷小分析引论》(*Introductio in analysin infinitorum*, 1748 年)、《微分学原理》(*Institutiones calculi differentialis*, 1755 年)、《积分学原理》(*Institutionum calculi integralis*, 1768—1770 年)等都是数学中的经典。以他名字命名的数学概念遍布数学多个领域，如：初等几何中的欧拉线、解析几何中的欧拉变换公式、数论中的欧拉函数、变分学中的欧拉方程、复变函数论中的欧拉公式等。数学中的许多数学符号也都是由欧拉发明并首次使用的，例如， $\pi$ 、 $i$ 、 $e$ 、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\Sigma$ 、 $f(x)$ 和 $\Delta x$ 等。德国数学家高斯(C. F. Gauss, 1777—1855 年)曾说：“研究欧拉的著作永远是了解数学的最好方法。”欧拉还积极地将数学理论应用到其他学科问题的研究中，他在物理、力学、天文学、弹道学、航海学、建筑学等领域都获得了大量研究成果。

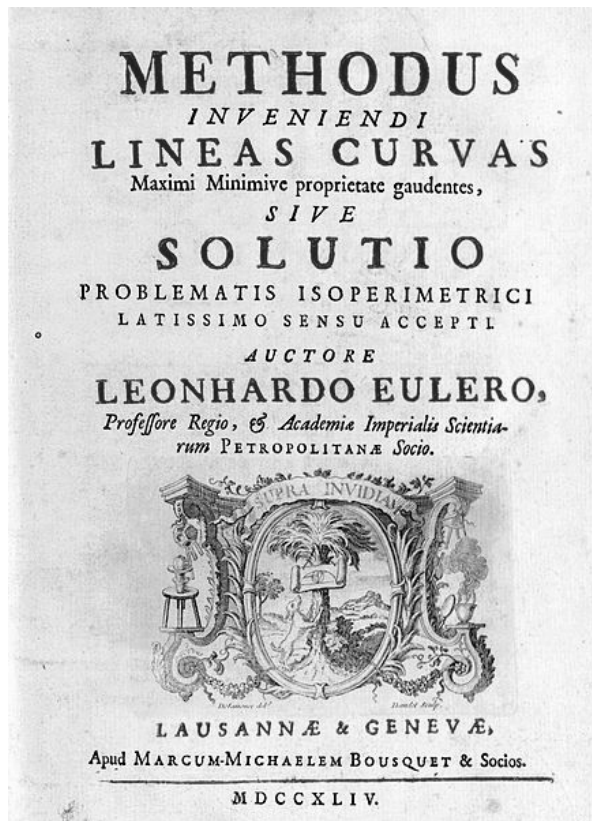


图 1.3.9 欧拉几何著作封面

欧拉的高产与他的专注、勤奋、顽强和孜孜不倦的治学精神是分不开的。据统计，他平均每年写出 800 页的论文。由于过度的劳作，欧拉在 28 岁时就右眼失明。1771 年圣彼得堡的一场大火将欧拉的藏书和手稿化为灰烬，但这些都未击倒欧拉。即使在他 59 岁时完全失明之后，欧拉仍坚持研究。凭借异于常人的记忆力和心算能力，欧拉通过口述的方式完成了 400 篇左右的论文和几部书籍。据记载，在 1775 年，他平均每周就能完成一篇数学论文。在欧拉去世之后，俄国彼得堡科学院用了 47 年的时间才将他的著作全部整理完毕。

欧拉为人谦和，对后辈多有提携。这也是他被世人所尊敬的重要原因。法国数学家拉格朗日(J. Lagrange, 1736—1813 年)从 19 岁起开始和欧拉通信讨论等周问题(isoperimetric problem)的解法。在此之前，欧拉已经考虑过该问题。但他谦虚地放弃自己在此问题上尚不

成熟的论文，而客观地给予拉格朗日的工作以赞誉，从而使拉格朗日的工作得以发表并在数学界流传，由此也导致了变分法的诞生。

欧拉生活过的三个国家（瑞士、俄国和德国）都自豪地把欧拉作为自己国家的数学家。法国著名数学家、天文学家拉普拉斯（P.-S. Laplace, 1749—1827 年）曾说过：“读读欧拉吧，他是我们所有人的老师。”（法文：Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous, 英文：Read Euler, read Euler, he is the master of us all）

## 1.4 曲面论概述

曲面有着悠久的历史，古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 公元前 287—212 年）曾研究过以他名字命名的阿基米德螺旋面。但曲面的系统研究开始于微分几何。与曲线的理论相比，曲面的理论要更复杂。欧拉在《关于曲面上曲线的研究》中给出了曲面的正确表示方法，引入了曲面的法曲率、主曲率，并得到了计算法曲率的欧拉公式。蒙日在 1795 年出版的《关于分析的几何应用的活页论文》是第一部系统的微分几何论著。蒙日在 1807 年出版的《分析在几何中的应用》中将微分方程应用于曲线、曲面的研究，同时他还反过来用几何解释微分方程，创立了偏微分方程的特征理论。法国数学家达布（J. -G. Darboux, 1842—1917 年）对微分几何方面的贡献主要总结于 4 卷本的《曲面一般理论讲义》（*Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, 1887—1896 年）和《正交系讲义》（*Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*）之中。在书中，达布发展了活动标架（也称为达布标架），使它成为曲面的重要研究工具。书中还系统地总结介绍了微分几何创立近百年来发展成就。高斯在 1827 年发表的《关于曲面的一般研究》开启了内蕴几何的研究，也为黎曼创立现代微分几何奠定了基础。

在本节中，我们将概括介绍曲面的表示、定向、第一基本形式、第二基本形式和曲率等曲面论的主体内容。

### 1.4.1 曲面的表示

**定义 1.4.1（简单曲面）** 设  $D$  为  $R^2$  中的开区域，若映射  $f: D \rightarrow R^3$  为双方连续的双射，则称其象集  $f(D)$  为  $R^3$  中的简单曲面，简称曲面（surface），如图 1.4.1 所示。

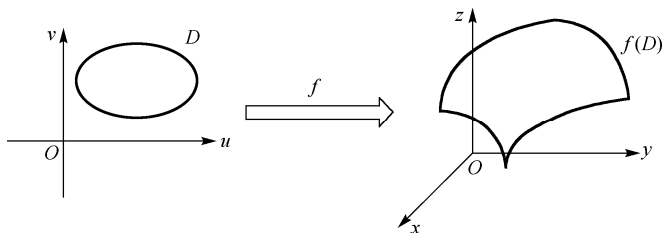


图 1.4.1 曲面

曲面的表示范围有两种。曲面的坐标式参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad (1.4.1)$$

而其向量式参数方程为:  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ 。曲面参数方程中参数的个数反映了曲面是二维的。同时, 对一些具体曲面而言, 参数  $u$  和  $v$  往往具有具体含义。

**【例 1.4.1】** 设  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ , 球面的参数方程为:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi, \\ y = R \cos \theta \sin \varphi, \\ z = R \sin \theta, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

其中,  $R$  为球面半径。球面如图 1.4.2 所示。

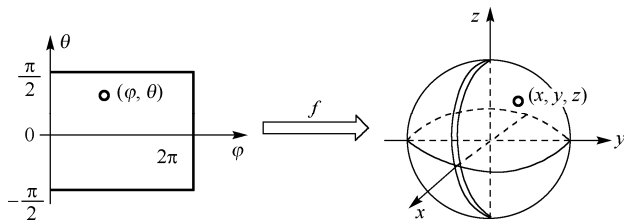


图 1.4.2 球面

注意到例 1.4.1 中参数的取值范围, 我们可以发现此处定义中的球面是不包含球面南、北极的, 而且是带有一条“裂缝”的球面, 不是封闭的, 是通常意义上完整球面的一部分。实际上, 定义 1.4.1 中的简单曲面由于定义域是开区域, 因此在双射之下获得是  $R^3$  中一个的曲面片。但在古典微分几何中, 我们着重研究的是曲面的局部性质。因此, 简单曲面可以满足古典微分几何的研究需求。如果我们需要从整体意义上研究曲面, 如封闭的球面, 那么这就需要使用现代微分几何中流形的概念和大范围分析的方法加以处理。

**定义 1.4.2 (曲纹坐标网)** 曲面的坐标式参数方程 (1.4.1) 中的参数也称为曲面的曲纹坐标 (curvilinear coordinate)。若参数  $v$  取其取值范围中的某个常数  $v_0$ , 而参数  $u$  在其取值范围中任意变动, 则  $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$  确定的是曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的一条曲线, 称为  $u$ -曲线。类似地, 若参数  $u$  取其取值范围中的某个常数  $u_0$ ,  $v$  在其取值范围中任意变动, 则我们可获得  $v$ -曲线  $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ 。 $u$ -曲线和  $v$ -曲线合称为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的坐标曲线。当  $u_0$  和  $v_0$  取参数  $u$  和  $v$  取值范围中的不同常数时, 我们可得曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的两族曲线。它们在曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上形成一个网, 称为曲面的曲纹坐标网, 如图 1.4.3 所示。

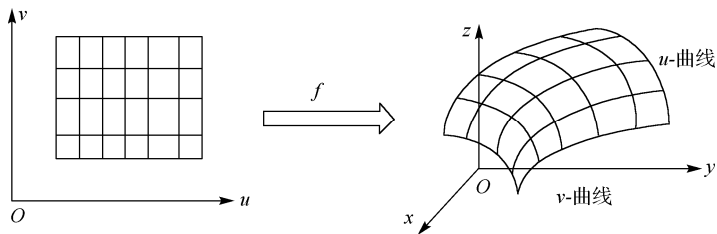


图 1.4.3 曲纹坐标网

与空间直角坐标系相比, 曲面的曲纹坐标系所需要的坐标数减少, 并且其个数反映了曲面的维数。同时, 利用附着在表面上的曲纹坐标系能够区分表面上不同点的相对位置, 不依赖于比它高维的外围空间, 摆脱了外围空间的束缚。这也是抽象流形上坐标系建立方法思想的来源。

如图 1.4.4 所示, 例 1.4.1 中的  $\varphi$ -曲线为球面上的一族平行于  $xOy$  面的圆 (抠去一点), 即抠去一点的纬线圆。 $\theta$ -曲线是球面上的连接南北极的半圆, 即不包含端点的半个经线圆。

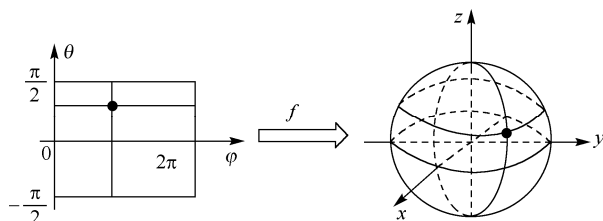


图 1.4.4 球面

在实际生活中, 我们正是利用经纬线网在地球进行定位的。例如, 东经  $35^\circ$ 、北纬  $43^\circ$  即指定了地球确定的一点位置。

曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的  $u$ -曲线和  $v$ -曲线在点  $(u_0, v_0)$  处的切向量分别为:

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\} \bigg|_{(u_0, v_0)} \quad (1.4.3)$$

和

$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\} \bigg|_{(u_0, v_0)} \quad (1.4.4)$$

**定义 1.4.3 (正则曲面)** 若曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的  $u$ -曲线和  $v$ -曲线在点  $(u_0, v_0)$  处的切向量满足:  $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ , 则称  $(u_0, v_0)$  为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的正则点。若曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的点都是正则点, 则称曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  为正则曲面 (regular surface)。

**【例 1.4.2】** 验证球面  $\vec{r} = \{R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta\}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  的正则性。

**解:** 由

$$\vec{r}_\theta = \{-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta\} \quad (1.4.5)$$

和

$$\vec{r}_\varphi = \{-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0\} \quad (1.4.6)$$

可得

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = -R^2 \cos \theta \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\} \quad (1.4.7)$$

因为  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 所以要使  $\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \vec{0}$ , 则  $\sin \theta = 0$ , 从而有  $\theta = 0$ 。而此时,  $\cos \theta \cos \varphi = \cos \varphi$  和  $\cos \theta \sin \varphi = \sin \varphi$  不可能同时为 0。所以, 该球面为正则曲面。

为什么要考虑正则点和正则曲面呢? 为了回答这个问题, 我们先考虑曲面的切向量。曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的曲线  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  在参数  $t = t_0$  的点  $(u_0, v_0)$  处的切向量为:

$$\vec{r}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \frac{du}{dt} \bigg|_{t=t_0} + \vec{r}_v(u_0, v_0) \frac{dv}{dt} \bigg|_{t=t_0} \quad (1.4.8)$$

也称为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在点  $(u_0, v_0)$  处的切向量。对正则点  $(u_0, v_0)$  而言, 不共线的切向量

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$  和  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  可确定一个平面。而由式 (1.4.8) 可知, 曲面在点  $(u_0, v_0)$  处的切向量  $\vec{r}'(t_0)$  在该平面上。

**定义 1.4.4 (曲面的切平面和法向量)** 曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在正则点  $(u_0, v_0)$  处的切向量  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  和  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  所确定的平面称为曲面在该点处的切平面 (tangent plane)。曲面在正则点  $(u_0, v_0)$  处垂直于该点切平面的向量称为曲面在点  $(u_0, v_0)$  处的法向量 (normal vector), 记为:

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \quad (1.4.9)$$

设  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u, v) = \{X, Y, Z\}$  为切平面上任一点处的向径, 由向量的位置关系可知:  $\vec{r}_1(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0)$  与  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  和  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  共面。故切平面的方程为:

$$(\vec{r}_1(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0), \vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)) = 0 \quad (1.4.10)$$

## 1.4.2 曲面的定向

我们在生活中遇到的大部分曲面都是双侧曲面, 但也有一类截然相反的曲面。为了加以区分, 我们进行如下讨论: 若正则曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  的两套曲纹坐标  $(u, v)$  和  $(\bar{u}, \bar{v})$  之间有如下关系:  $u = u(\bar{u}, \bar{v})$  和  $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ , 则该曲面也可以表示为  $\vec{r} = \vec{r}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ 。计算可知, 在这两套曲纹坐标系下, 曲面上任一点处法向量:

$$\vec{n}_1(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) \quad (1.4.11)$$

和

$$\vec{n}_2(\bar{u}, \bar{v}) = \vec{r}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) \times \vec{r}_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \quad (1.4.12)$$

的关系为:

$$\vec{n}_2(\bar{u}, \bar{v}) = \vec{n}_1(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \quad (1.4.13)$$

其中

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}$$

称为雅克比行列式 (Jacobian determinant)。

据此, 我们可以引入曲面定向的概念。

**定义 1.4.5 (曲面的定向)** 设  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  为正则曲面, 若其在任一点处的两套曲纹坐标系  $(u, v)$  和  $(\bar{u}, \bar{v})$  的雅克比行列式都满足  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$ , 则称该曲面为可定向曲面 (orientable surface)。否则, 称为不可定向曲面。对于可定向曲面而言, 在曲面的曲纹坐标系下指定了法向量的指向, 就等于给定了曲面的一个定向。

可定向曲面就是通常所说的双侧曲面, 这类曲面有通常的所谓上下侧、前后侧、左右侧、内外侧之分。而不可定向曲面 (也就是单侧曲面) 则没有侧之分。

莫比乌斯带 (Möbius strip) 是单侧曲面的最著名例子之一。它是由德国数学家、天文学家莫比乌斯 (A. F. Möbius, 1790—1868 年) 和李斯丁 (J. B. Listing, 1808—1882 年) 在 1858 年各自独立发现的。莫比乌斯带可由一长条纸带扭转  $180^\circ$  后对粘得到。其不可定向性可用下

面的办法加以检验：在不越过其边界的前提下，我们可以用彩笔将整个莫比乌斯带涂遍。从另外一个角度来说，从莫比乌斯带的某一点出发，可不越过边界沿着莫比乌斯带到达其另一面上的对应点。在此过程中，出发点处的法向量变为另一面对应点处与之反向的法向量。莫比乌斯带有很多有趣的性质：如果从中间将一个莫比乌斯带剪开，我们得到的不是两个宽度窄一点的带子，而是一个把长方形纸带的一边扭转了两次再粘合而成的环。如果再把刚刚得到的这个环带再次从中间剪开的话，我们将得到两个环。莫比乌斯带如图 1.4.5 所示。

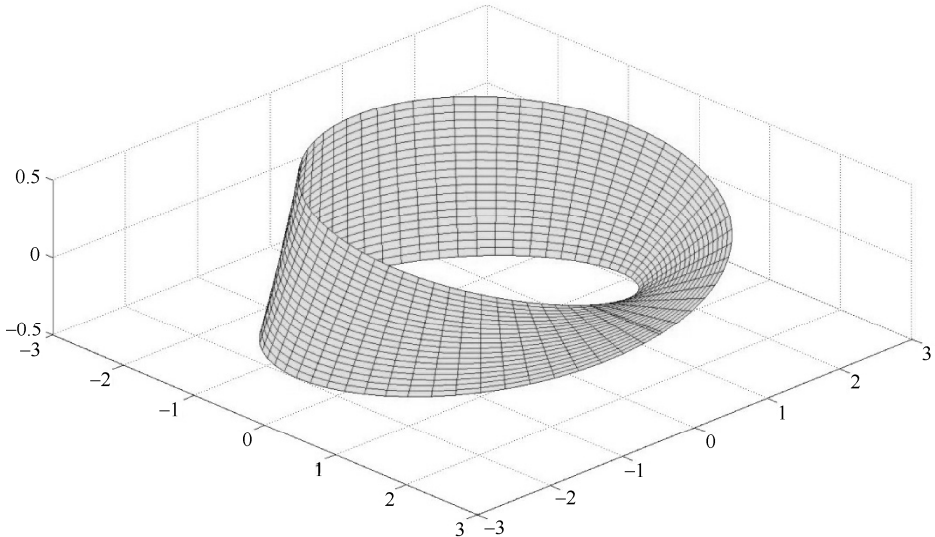


图 1.4.5 莫比乌斯带

荷兰著名版画家埃舍尔 (M. C. Escher, 1898—1972 年) 曾在 1961 年和 1963 年创作了两幅关于莫比乌斯带的版画作品 (如图 1.4.6 和图 1.4.7 所示)。尤其是图 1.4.7, 埃舍尔用莫比乌斯带上的蚂蚁很好地刻画了莫比乌斯带的不可定向性。

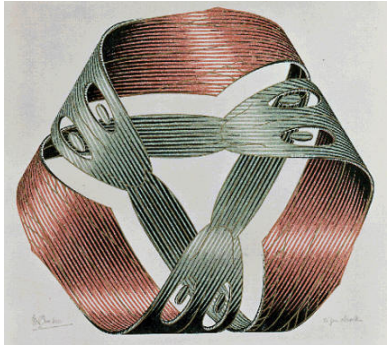


图 1.4.6 版画作品 1

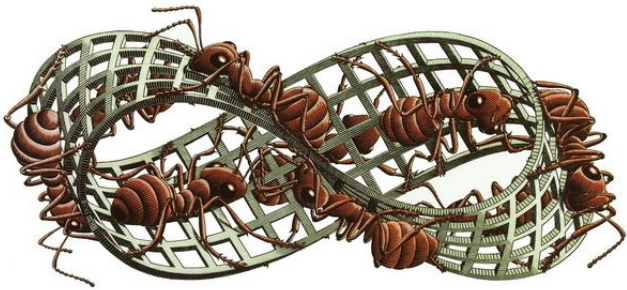


图 1.4.7 版画作品 2

克莱因瓶 (Klein bottle) 也是不可定向曲面的著名例子之一。德国数学家克莱因 (F. C. Klein, 1849—1925 年) 在 1882 年提出了克莱因瓶的最初概念, 其德文原始名称是 Kleinsche Fläche, 意为克莱因曲面 (Klein surface)。可能后来在传播过程中误将德文的 “Fläche” 写成 “Flasche”, 于是就变成了德文的 Kleinsche Flasche, 意即克莱因瓶。最终, 德文中也就一直沿用了克莱因瓶这个称谓。将一个橡皮软管的两端对粘在一起, 我们可以获得一个甜甜圈 (或

救生圈，即环面）。而如果将橡皮软管的一端扭曲进入内部，然后将其与橡皮软管的另一端粘在一起，这样我们获得的就是一个三维空间中所见的克莱因瓶（如图 1.4.8 所示）。与莫比乌斯带可以在三维空间中实现不同，克莱因瓶只能放到（即嵌入，参见 3.5 节）四维以上的空间中去。也就是说，真正的克莱因瓶只能在四维以上的空间中才能实现，我们所看到的只是克莱因瓶在三维空间中的一个投影。这就像莫比乌斯带和球面不能放在平面上一样。克莱因瓶的单侧特性可以使我们不用穿过其表面而直接从其“内部”到“外部”（实际上，克莱因瓶已经没有内、外部之分）。

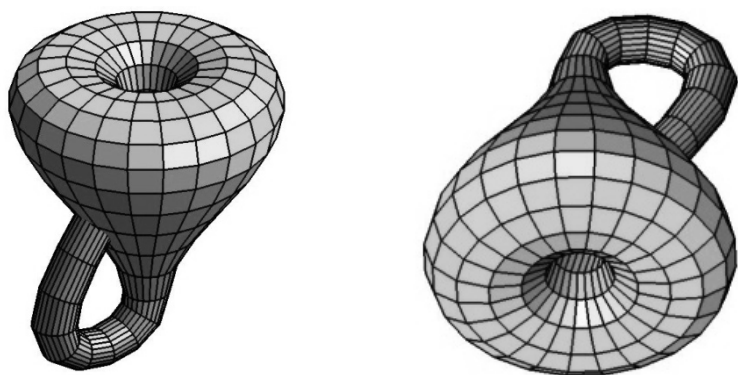


图 1.4.8 克莱因瓶

我们以后更多关注的是可定向曲面的性质。因为曲面是后面将要介绍的流形具体例子，所以此处曲面定向的定义也为流形定向提供了参照和解释。

### 1.4.3 曲面的第一基本形式

由曲面的方程  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  可得：  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ 。由此我们可以引入研究曲面的重要工具——曲面的第一基本形式。

**定义 1.4.6（曲面的第一基本形式）** 考虑曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ，称：

$$I = ds^2 = d\vec{r}^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \quad (1.4.14)$$

为曲面的第一基本形式（first fundamental form），其中  $E = \vec{r}_u^2$ 、 $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$  和  $G = \vec{r}_v^2$  称为曲面的第一类基本量（first fundamental quantity）。

曲面的第一基本形式是关于  $du$  和  $dv$  的一个二次形式。注意到其系数满足： $E > 0$  和  $-\frac{\Delta}{4} = EG - F^2 = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 > 0$ ，因此它是一个正定的二次形式。

**【例 1.4.3】** 计算球面  $\vec{r} = \{R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta\}$ ， $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \varphi < 2\pi$  的第一基本形式。

**解：**由式 (1.4.5) 和式 (1.4.6) 可知，

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = R^2, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0, \quad G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = R^2 \cos^2 \theta \quad (1.4.15)$$

所以，球面的第一基本形式为：

$$I = R^2 d\theta^2 + R^2 \cos^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.4.16)$$



【例 1.4.4】 考虑平面和单位圆柱面的定义基本形式。 $xOy$  面的参数方程为:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = \{x, y, 0\} \quad (1.4.17)$$

计算其第一类基本量有:  $E = 1$ ,  $F = 0$  和  $G = 1$ 。因此, 其第一基本形式为  $I = dx^2 + dy^2$ 。类似, 由单位圆柱面的方程  $\vec{r} = \vec{r}(\theta, z) = \{\cos \theta, \sin \theta, z\}$  可得其第一基本形式为:

$$I = d\theta^2 + dz^2 \quad (1.4.18)$$

两个不同的几何对象, 单位圆柱面的第一基本形式与平面的第一基本形式在本质上却是相同的。这说明了什么问题? 事实上, 曲面的第一基本形式就是曲面的度量。它可以用来定义刻画曲面两点之间的距离。由于具有相同的第一基本形式, 单位圆柱面可由平面经过等距变换 (isometric transformation) 获得。这一点通过我们的生活经验可以加以证实: 如图 1.4.9 所示, 我们可以将一张长方形白纸的两个对边粘接后卷成一个圆筒。而在此前后, 平面上的两点  $p$  和  $q$  的距离和卷成的圆柱面上对应两点的距离相等。

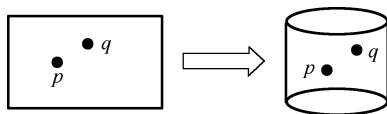


图 1.4.9 平面与柱面

有了曲面的第一基本形式之后, 我们可以考虑由它可以决定的几何量和性质。曲面上仅由曲面的第一基本形式可以决定的量称为曲面的内蕴量, 由第一基本形式就可以决定的性质称为曲面的内蕴性质。研究曲面内蕴量和内蕴性质的几何称为内蕴几何。曲面的内蕴量包括曲面上曲线的弧长、两条曲线间的夹角和曲面域的面积等。

**定义 1.4.7 (曲面上曲线的弧长)** 设  $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  是曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的一条曲线, 其弧长 (arc length) 为:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I} \quad (1.4.19)$$

考虑例 1.4.4 中的  $xOy$  面上的曲线  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , 其弧长为:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (1.4.20)$$

这与我们之前在数学分析中的公式是一致的。

**定义 1.4.8 (曲面上两条曲线间的夹角)** 曲面上两条曲线在交点处的切向量的夹角称为两条曲线间的夹角 (angle)。

设曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上两条曲线在交点处的切向量分别为:  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$  和  $\delta\vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$ 。由向量间的点乘运算公式可得这两个切向量夹角的余弦为:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{|d\vec{r}| |\delta\vec{r}|} \\ &= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

特别地, 平面上的  $u$ -曲线和  $v$ -曲线间的夹角余弦为:  $\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$ 。

考虑曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的曲面域  $D$ , 基于微元法, 用  $u$ -曲线和  $v$ -曲线将曲面域  $D$  分割, 可获得曲面上完整和不完整的曲边四边形 (包括曲边三角形、曲边梯形)。

如图 1.4.10 所示, 当分割加细时, 不完整的曲边四边形所占的比重将越来越小, 而完整曲边四边形的面积和将越来越接近于曲面域的面积。

我们来计算图 1.4.11 所示的一个典型小曲边四边形的面积。因为

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{r}(u + du) - \vec{r}(u, v) = \vec{r}_u du + o^2(du) \approx \vec{r}_u du \quad (1.4.22)$$

而  $\overrightarrow{PP_2} \approx \vec{r}_v dv$ ，所以，曲边四边形的面积近似等于对应平行四边形的面积：

$$S \approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1.4.23)$$

根据微元法，我们可获得曲面上曲面域的计算公式。

**定义 1.4.9 (曲面上曲面域的面积)** 曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的曲面域  $D$  的面积 (area) 为：

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1.4.24)$$

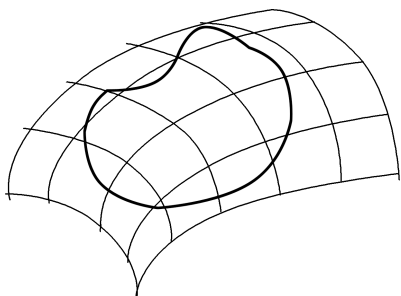


图 1.4.10 曲面域

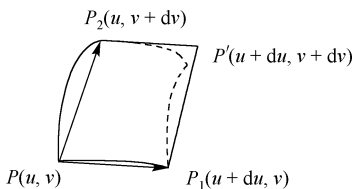


图 1.4.11 小曲边四边形

#### 1.4.4 曲面的第二基本形式

在例 1.4.4 中，我们注意到平面和单位球面这两个不同的几何对象具有相同的第一基本形式。它们的明显差别是弯曲程度不同。而要刻画它们的这种差别，还需要引入另外一个重要工具——曲面的第二基本形式。

考虑图 1.4.11 中的曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ，其上临近两点  $P(u, v)$  和  $Q(u + du, v + dv)$ ，故

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(u + du, v + dv) - \vec{r}(u, v) \quad (1.4.25)$$

令  $d = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}$ ，则其表示向量在点处的法向量上的投影。 $d$  的绝对值表示从点  $P$  到点  $Q$  处切平面的距离，而  $d$  的符号则依赖于点位于切平面的哪一侧。换句话说， $d$  的符号反映了曲面在点处的弯曲方向。由

$$d = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} d\vec{r} \cdot \vec{n} + o(du^2 + dv^2) \quad (1.4.26)$$

可知， $\frac{1}{2} d\vec{r} \cdot \vec{n}$  是  $d$  的线性主部。它刻画了曲面在点  $P$  附近的弯曲程度。据此，引入曲面的第二基本形式。

**定义 1.4.10 (曲面的第二基本形式)** 考虑  $C^2$ -曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ，称

$$II = -d\vec{r} \cdot d\vec{n} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (1.4.27)$$

为曲面的第二基本形式 (second fundamental form)，其中

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1.4.28)$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1.4.29)$$

和

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1.4.30)$$

称为曲面的第二类基本量 (second fundamental quantity)。

从前述讨论可知, 曲面的第二基本形式反映了曲面在其上任一点附近的弯曲程度。这就是曲面第二基本形式的几何意义。

**【例 1.4.5】** 计算球面  $\vec{r} = \{R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta\}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  的第二基本形式。

**解:** 由式 (1.4.15) 可知,

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \theta \quad (1.4.31)$$

利用式 (1.4.3)、式 (1.4.4) 和式 (1.4.15) 计算, 可知法向量为:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi}{\sqrt{EG - F^2}} = -\{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\} \quad (1.4.32)$$

又因为

$$\vec{r}_{\theta\theta} = \{-R \cos \theta \cos \varphi, -R \cos \theta \sin \varphi, -R \sin \theta\} \quad (1.4.33)$$

$$\vec{r}_{\theta\varphi} = \{R \sin \theta \sin \varphi, -R \sin \theta \cos \varphi, 0\} \quad (1.4.34)$$

和

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \{-R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, 0\} \quad (1.4.35)$$

所以可得

$$L = \vec{r}_{\theta\theta} \cdot \vec{n} = R, \quad M = \vec{r}_{\theta\varphi} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = \vec{r}_{\varphi\varphi} \cdot \vec{n} = R \cos^2 \theta \quad (1.4.36)$$

从而, 球面的第二基本形式为:

$$II = R d\theta^2 + R \cos^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.4.37)$$

**【例 1.4.6】** 考虑平面和单位圆柱面的第二基本形式。 $xOy$  面的参数方程为:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y) = \{x, y, 0\}$$

计算其第二类基本量有:  $L = M = N = 0$ 。因此, 其第二基本形式为  $II = 0$ 。类似, 由单位圆柱面的方程

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, z) = \{\cos \theta, \sin \theta, z\} \quad (1.4.38)$$

计算可得, 其第二基本形式为:

$$II = -du^2 \quad (1.4.39)$$

曲面的第一基本形式是正定的, 而曲面的第二基本形式则不同, 它有多种情况。根据曲面在一点处第二基本形式正定性的不同, 将曲面上的点分为三类: 当第二基本形式的判别式小于零 (第二基本形式是正定或负定的) 时, 称该点为椭圆点; 当其判别式大于零 (第二基

本形式是不定的)时,称该点为双曲点;当第二基本形式的判别式等于零(第二基本形式是退化的)时,称该点为抛物点( $L$ 、 $M$ 和 $N$ 不全为零),或称该点为平点( $L=M=N=0$ )。

**定理 1.4.1** 曲面在其上椭圆点附近是凸的或凹的,在其上双曲点附近是马鞍形的。

**证明:** 设  $P_0(u_0, v_0)$  为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的一个定点,考虑二元函数

$$f(u, v) = [\vec{r}(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0)] \cdot \vec{n}(u_0, v_0) \quad (1.4.40)$$

因为

$$f_u(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{n}(u_0, v_0) = 0 \quad (1.4.41)$$

和

$$f_v(u, v) = \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{n}(u_0, v_0) = 0 \quad (1.4.42)$$

所以,  $P_0(u_0, v_0)$  是函数  $f(u, v)$  的临界点。

根据二元函数极值的判定定理,可利用黑塞矩阵(Hessian matrix):

$$\begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}(u_0, v_0) \quad (1.4.43)$$

的行列式符号判定函数  $f(u, v)$  在点  $P_0(u_0, v_0)$  处是否取得极值。在椭圆点,有  $M^2 - LN < 0$ 。当  $L > 0$  时,函数  $f(u, v)$  在点  $P_0(u_0, v_0)$  处取极小值。当  $L < 0$  时,函数  $f(u, v)$  在点  $P_0(u_0, v_0)$  处取极大值,因此,曲面在该点附近是凹的或凸的。在双曲点,有  $M^2 - LN > 0$ ,函数  $f(u, v)$  在该点既不取极小值,也不取极大值,因此,曲面在点  $P_0(u_0, v_0)$  附近是马鞍形的。证毕。

### 1.4.5 曲面的曲率

为了更加准确地定量刻画曲面在不同点处的弯曲程度,还需要引入曲面的法曲率、高斯曲率等概念。

根据我们的生活经验,球面在其上不同点处的弯曲程度都是相同的。但某些曲面在某些点处的沿不同方向的弯曲程度是不同的,如马鞍面。如何刻画后者的弯曲程度?这就需要曲面的法曲率概念。由曲线论知识可知,曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的曲线在一点  $P$  处有费雷内标架:  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  和  $\vec{\gamma}$ 。曲面在点  $P$  处有法向量  $\vec{n}$ 。设  $\vec{n}$  与  $\vec{\beta}$  的夹角为  $\theta$ ,则由  $\dot{\vec{\alpha}} = \kappa \vec{\beta}$  可得:

$$\kappa \cos \theta = \kappa \vec{\beta} \cdot \vec{n} = \dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{n} \cdot d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{II}{I} \quad (1.4.44)$$

式(1.4.44)左端中含有反映曲线弯曲程度的项  $\kappa$ ,而右端含有反映曲面弯曲程度的第二基本形式  $II$ 。因此,该式将曲线、曲面的弯曲性有机地联系起来。换句话说,我们可以用曲线的弯曲程度来刻画曲面在该点处沿该曲线切向量方向的弯曲程度。

**定义 1.4.11 (法曲率)** 设  $\vec{\alpha}$  为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  上的曲线在点  $P$  处的单位切向量,  $\vec{\beta}$  为曲线在点  $P$  处的单位法向量,  $\theta$  为  $\vec{n}$  与  $\vec{\beta}$  的夹角。称

$$\kappa_n = \kappa \cos \theta = \frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad (1.4.45)$$

为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在  $P$  点处沿方向  $\vec{\alpha}$  的法曲率(normal curvature)。

曲面上两条在交点处具有共同切方向的曲线,称为在该交点处相切的曲线。根据定义 1.4.11 不难获得如下结果:

**定理 1.4.2** 曲面上两条相切的曲线在切点处具有相同的法曲率。

**定义 1.4.12 (法截线)** 设  $(du:dv)$  为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$  上点  $P$  处的一个确定切方向, 由曲面在该点处的法向量  $\vec{n}$  与切向量  $(du:dv)$  张成的平面称为曲面在点  $P$  处的法截面 (normal section)。而法截面与曲面的交线称为曲面的法截线, 如图 1.4.12 所示。

法截线有什么特别之处呢? 对定方向  $(du:dv)$  而言,  $\kappa_n$  是一个定值。曲面上有无数多条通过点  $P$  的曲线在该点的法曲率取得该定值, 其中有一条特殊的曲线——法截线的主法向量  $\vec{\beta}$  平行于曲面在点  $P$  的法向量  $\vec{n}$ 。因此, 法截线的曲率为  $\kappa = \pm \kappa_n = \pm \frac{II}{I}$ 。从而, 法截线在点  $P$  处的曲率等于曲面在点  $P$  处的法曲率或法曲率的负值。

**【例 1.4.7】** 对  $xOy$  面  $\vec{r} = \vec{r}(x,y) = \{x,y,0\}$  来说, 第二基本形式为  $II=0$ , 法曲率  $\kappa_n=0$ , 因此, 平面在其上各点处沿不同方向的弯曲程度都为 0, 其法截线为直线。对球面

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = \{R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta\}$$

来说, 法曲率为  $\kappa_n = \pm \frac{1}{R}$ , 其中  $R$  为球面半径, 所以, 球面在其上

每一点处沿各方向的弯曲程度都一致, 其法截线为大圆。

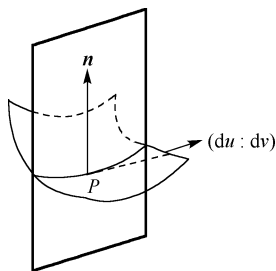


图 1.4.12 法截线

理论上, 可以用法曲率来刻画曲面在一点处沿不同方向的弯曲程度的差别。但许多曲面在某些点处的不同方向上法曲率有所不同, 那么要刻画曲面在这些点处的弯曲程度就有些麻烦。有没有更容易刻画曲面在不同点处弯曲程度的量? 为了回答这个问题, 引入曲面在一点处主曲率的概念。

**定义 1.4.13 (主曲率)** 称曲面在其上一点处沿不同方向的法曲率中的最小值与最大值  $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$  为曲面在该点处的主曲率 (principal curvature)。

**【例 1.4.8】** 设  $a \geq b > 0$ , 计算抛物面  $z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$  在原点处的法曲率和主曲率。

**解:** 由曲面的参数方程

$$\vec{r} = \left\{ u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right\}$$

计算可得

$$\vec{r}_u = \left\{ 1, 0, \frac{2u}{a^2} \right\}, \quad \vec{r}_v = \left\{ 0, 1, \frac{2v}{b^2} \right\}$$

进而有

$$\vec{r}_{uu} = \left\{ 0, 0, \frac{2}{a^2} \right\}, \quad \vec{r}_{uv} = \{0, 0, 0\}, \quad \vec{r}_{vv} = \left\{ 0, 0, \frac{2}{b^2} \right\}$$

和

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left\{ -\frac{2u}{a^2}, -\frac{2v}{b^2}, 1 \right\}$$

由此可得该曲面的第一基本量和第二基本量为:

$$E = 1 + \frac{4u^2}{a^4}, \quad F = \frac{4uv}{a^2b^2}, \quad G = 1 + \frac{4v^2}{b^4}$$

$$L = \frac{2}{a^2 \sqrt{1 + \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4}}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{2}{b^2 \sqrt{1 + \frac{4u^2}{a^4} + \frac{4v^2}{b^4}}}$$

这样, 该抛物面在原点的第一基本形式和第二基本形式分别为:

$$I = (du)^2 + (dv)^2, \quad II = \frac{2}{a^2} (du)^2 + \frac{2}{b^2} (dv)^2 \quad (1.4.46)$$

所以, 曲面在原点处沿切方向  $(du:dv)$  的法曲率是:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{II}{I} = \frac{2}{a^2} \frac{(du)^2}{(du)^2 + (dv)^2} + \frac{2}{b^2} \frac{(dv)^2}{(du)^2 + (dv)^2} \\ &= \frac{2}{a^2} \cos^2 \theta + \frac{2}{b^2} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.4.47)$$

式中,  $\cos \theta = \frac{du}{\sqrt{(du)^2 + (dv)^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{dv}{\sqrt{(du)^2 + (dv)^2}}$ 。注意到  $a \geq b > 0$ , 故法曲率在  $\theta = \frac{\pi}{2}$  和

$\theta = 0$  时达到最大值和最小值, 所求的主曲率为  $\kappa_1 = \frac{2}{b^2}$  和  $\kappa_2 = \frac{2}{a^2}$ 。

**定理 1.4.3 (欧拉公式)** 设  $(du:dv)$  为曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在点  $P$  处的任意一个切方向, 它与  $u$ -曲线的夹角为  $\theta$ ,  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  为曲面在点  $P$  处的主曲率, 则:

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \quad (1.4.48)$$

根据罗德里格定理, 方向  $(du:dv)$  为主方向的充要条件为  $d\vec{n} = -\kappa_N d\vec{r}$ , 其中  $\kappa_N$  为主曲率  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$ 。由此可知,

$$\vec{n}_u du + \vec{n}_v dv = -\kappa_N (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \quad (1.4.49)$$

对式 (1.4.49) 两边分别点乘  $-\vec{r}_u$  和  $-\vec{r}_v$ , 有:

$$\begin{cases} (L - \kappa_N E) du + (M - \kappa_N F) dv = 0 \\ (M - \kappa_N F) du + (N - \kappa_N G) dv = 0 \end{cases} \quad (1.4.50)$$

若方程组 (1.4.50) 有非零解, 则其系数行列式必须为零, 即

$$(EG - F^2) \kappa_N^2 - (LG - 2MF + NE) \kappa_N + (LN - M^2) = 0 \quad (1.4.51)$$

由此可得,

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.4.52)$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} \quad (1.4.53)$$

由此引入高斯曲率和平均曲率的概念。

**定义 1.4.14 (高斯曲率和平均曲率)** 设曲面  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  在点  $P(u, v)$  的第一类基本量为  $E$ ,  $F$  和  $G$ , 第二类基本量为  $L$ ,  $M$  和  $N$ , 称

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1.4.54)$$

为曲面在点  $P$  处的高斯曲率 (Gauss curvature), 也称为全曲率或总曲率。称

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \quad (1.4.55)$$

为曲面在点  $P$  处的平均曲率 (mean curvature)。

对照之前的讨论, 我们也可以用高斯曲率的符号对面上的点进行分类: 若  $K > 0$ , 则该点为椭圆点 (elliptic point); 若  $K < 0$ , 则该点为双曲点 (hyperbolic point); 若  $K = 0$ , 则该点为抛物点 (parabolic point)。

若曲面上每点处的平均曲率都是 0, 则称该曲面是极小曲面 (minimal surface)。生活中, 肥皂泡薄膜表面就是一个极小曲面。如果将肥皂液本身的重量忽略不计, 也不考虑除了肥皂膜表面张力以外的其他干扰因素, 则薄膜的势能在表面张力作用下便会达到最小值, 从而必定使肥皂膜的曲面具有最小的面积。19 世纪比利时物理学家普拉托 (J. A. F. Plateau, 1801—1883 年) 进行了大量的皂液膜 (即肥皂膜) 的实验, 验证了以闭曲线为边界的极小曲面存在性。为了纪念普拉托的贡献, 人们把讨论给定边界的极小曲面的存在问题称为普拉托问题 (Plateau's problem)。但实际上该问题是由法国数学家拉格朗日 (J. Lagrange, 1736—1813 年) 在 1760 年提出的。该问题是变分法研究的重要内容, 极小曲面的存在性和正则性是几何测度论的重要研究课题。根据例 1.4.7 可知, 平面是极小曲面。极小曲面的其他经典例子还包括: 悬链面、螺旋曲面和 Enneper 曲面等。关于极小曲面的更多讨论可以参考陈维桓的《极小曲面》。

**【例 1.4.9】** 求旋转曲面  $\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = \{f(\theta)\cos\varphi, f(\theta)\sin\varphi, g(\theta)\}$  的高斯曲率。

解: 因为

$$\vec{r}_\theta = \{f'(\theta)\cos\varphi, f'(\theta)\sin\varphi, g'(\theta)\} \quad (1.4.56)$$

$$\vec{r}_\varphi = \{-f(\theta)\sin\varphi, f(\theta)\cos\varphi, 0\} \quad (1.4.57)$$

所以

$$E = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = [f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2, \quad F = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\varphi = 0, \quad G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = f^2(\theta)$$

由此可知,

$$\sqrt{EG - F^2} = f(\theta)\sqrt{[f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2} \quad (1.4.58)$$

利用式 (1.4.56)、式 (1.4.57) 和式 (1.4.58) 计算可知法向量为:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\{-g'(\theta)\cos\varphi, -g'(\theta)\sin\varphi, f'(\theta)\}}{\sqrt{[f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}} \quad (1.4.59)$$

又因为

$$\vec{r}_{\theta\theta} = \{f''(\theta)\cos\varphi, f''(\theta)\sin\varphi, g''(\theta)\} \quad (1.4.60)$$

$$\vec{r}_{\theta\varphi} = \{-f'(\theta)\sin\varphi, f'(\theta)\cos\varphi, 0\} \quad (1.4.61)$$

和

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \{-f(\theta)\cos\varphi, -f(\theta)\sin\varphi, 0\} \quad (1.4.62)$$

所以可得

$$L = \vec{r}_{\theta\theta} \cdot \vec{n} = -\frac{f''(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g''(\theta)}{\sqrt{[f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}} \quad (1.4.63)$$

$$M = \vec{r}_{\theta\varphi} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.4.64)$$

$$N = \vec{r}_{\varphi\varphi} \cdot \vec{n} = \frac{f(\theta)g'(\theta)}{\sqrt{[f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}} \quad (1.4.65)$$

从而, 高斯曲率为:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{g'(\theta)[f''(\theta)g'(\theta) - f'(\theta)g''(\theta)]}{f(\theta)\{[f'(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2\}^2} \quad (1.4.66)$$

特别地, 取  $f(\theta) = R \cos \theta$ ,  $g(\theta) = R \sin \theta$ , 即该旋转曲面是球面:

$$\vec{r} = \vec{r}(\theta, \varphi) = \{R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta\}$$

那么, 利用式 (1.4.66) 计算可得  $K = \frac{1}{R^2}$ 。

高斯曲率是反映曲面性质的一个重要几何量, 它刻画了曲面在其上一点处总的弯曲程度。从其定义式 (1.4.54) 的形式来看, 高斯曲率似乎不仅依赖于曲面在该点的第一类基本量, 还依赖于其第二类基本量。事实是否确实如此呢? 1852 年, 高斯在其著作《曲面研究》中给出了著名的高斯绝妙定理 (Gauss's theorema egregium), 回答了上述问题。

**定理 1.4.4 (高斯绝妙定理)** 曲面在其上各点处的高斯曲率由其在该点的第一类基本量所完全确定, 即高斯曲率是内蕴量。

事实上, 高斯经过细致的计算发现: 式 (1.4.54) 中由第二类基本量构成的因子  $LN - M^2$  可由第一类基本量的一阶偏导数和二阶偏导数表示出来。因此, 高斯曲率可由第一类基本量完全确定。如果不是经过细致的计算, 我们很难发现这一现象。高斯的绝妙定理揭示出可以不依赖曲面所在的外围空间来计算曲面的曲率, 这意味着可以摆脱外围空间的束缚来研究曲面, 这也正是高斯绝妙定理的“绝妙”之处。正因为高斯曲率是内蕴量, 所以曲面的高斯曲率在曲面的等距变换下是保持不变的。

从更高的层次来看, 曲面的高斯曲率实际上就是曲面这个二维黎曼流形的截曲率。换句话说, 高斯曲率也为理解黎曼流形的截曲率提供了帮助。

## 附录 1.4 高斯生平及学术贡献

高斯 (C. F. Gauss, 1777—1855 年), 生于德国的布伦瑞克, 卒于哥廷根。德国数学家、物理学家、天文学家。他是与阿基米德、牛顿和欧拉齐名的 4 位对数学发展产生最重要影响的数学家之一。

作为一个数学天才, 高斯在年轻时就已展现他在数学方面的天赋: 16 岁时, 他发现了二项式定理。19 岁时, 他解决了困扰世人两千年之久的正十七边形尺规作图法。22 岁时, 他取得博士学位。27 岁时, 他当选英国皇家学会会员。30 岁时, 他开始担任哥廷根大学教授, 直到去世。

高斯非常重视数学的应用。1818—1826 年间, 高斯主持了德国汉诺威公国的大地测量工作, 用新的方法提高了测量的精度。他从 30 岁开始直到去世一直担任哥廷根大学的天文台长。他利用不多的观测数据, 成功计算出当时发现不久的谷神星运行轨道, 这一计算结果为后来的天文观测所证实。

1827 年, 他发表了在微分几何历史上具有重要历史意义的论文《关于曲面的一般研究》, 这篇论文为古典微分几何中曲面论的发展奠定了基础。在微分几何创立一百多年后, 高斯第



一次发现了微分几何中最为关键性的概念和内容，建立起第一基本形式所决定的曲面内蕴几何。这奠定了黎曼几何等建立在度量基础之上的微分几何的发展，推动了几何学的发展。

高斯对数学结果追求完美，这与他成名很早存在一定的联系。图 1.4.14 为高斯的签名。他不愿意公开他自己认为不完整或会导致别人质疑的结果。例如，他在年轻时即开始对欧氏几何第五公设——平行公设的研究，并预见应该有一种不同于欧氏几何的几何学的存在，对其进行了研究。为了检验欧氏几何和非欧几何的可能性，高斯曾测量由三个山峰构成的三角形的内角和。他发现地球表面上的三角形内角和不会等于  $180^\circ$ ，这个工作即表明他在验证非欧几何在球面上的实现问题，但他却一直没有将自己的研究成果公之于众。他习惯上将自己每天的研究结果和想法都以简洁的方式记录在他的日记中。在他去世后，他给世人留下了 20 本这样的日记本。其中所记录的数学结果在他发现几年、几十年之后为其他数学家所发现并公开。据数学历史学家估计，如果高斯能及时公开他在当时的这些发现和结果，也许能将数学发展的历史进程向前推进 50 年。



图 1.4.13 高斯



图 1.4.14 高斯的签名

数学发展证明了高斯在第五公设研究上的直觉和发现——非欧几何后来被俄国数学家罗巴切夫斯基 (N. I. Lobachevsky, 1792—1856 年) 和匈牙利数学家鲍耶 (J. Bolyai, 1802—1860 年) 所各自独立发现。1826 年 2 月 23 日，罗巴切夫斯基 (见图 1.4.15) 在喀山大学物理数学系学术会议上，宣读了他的关于非欧几何的论文：《几何学原理及平行线定理严格证明的摘要》。而鲍耶也发现了第五公设不可证明性和非欧几何学的存在，并于 1832 年在他的父亲出版的一本著作里以附录的形式发表了自己的研究成果。值得一提的是，鲍耶在此之后逐渐放弃对非欧几何和数学的研究。这与他得知高斯在几十年前就做过这方面的研究并获得了结果有很大的关系。罗巴切夫斯基是第一个正式公布其关于双曲几何（也称为罗氏几何）这种非欧几何研究成果的数学家。在他公布非欧几何的发现之后，遭到当时包括学术权威在内的学术界的质疑和否定，甚至社会对其进行的人身攻击。但他仍能克服孤立和无助，捍卫自己的发现和结果。罗巴切夫斯基的最后著作《论几何学》就是在他去世前一年在双目失明的情况之下以口授的方式由他的学生帮助完成的。在罗巴切夫斯基的努力之下，非欧几何成为一个完整的理论体系。这段历史给后人带来很多启迪。有人用“春天一到，紫罗兰竞相开放”来概括非欧几何被不同数学家先后发现的现象。罗巴切夫斯基更被后人誉为“几何学中的哥白尼”。回顾这段历史，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基对待自己研究结果和数学研究的态度和方式确实值得我们深思。

高斯对另一种非欧几何——黎曼几何的创立也产生了直接而且重要的影响。黎曼（B. Riemann, 1826—1866 年）在 1854 年为取得哥廷根大学教职所作的就职演讲《论作为几何基础的假设》的题目就是由高斯从黎曼提交的三个题目中选定的。同时，高斯和其他数学家在曲面内蕴几何方面的工作也为黎曼创立新几何学奠定了坚实的基础。

高斯的研究遍及数学的多个分支和领域，并开创了若干新的数学分支和领域。就几何学而言，他的研究奠定了曲面内蕴几何的理论基石，并导致了黎曼几何的创立，他的研究成果深刻影响了微分几何的发展进程。后人尊称他为数学王子、数学之王。他的肖像也出现在德国的马克（图 1.4.16）和多国的邮票上。



图 1.4.15 罗巴切夫斯基



图 1.4.16 德国的马克

## 1.5 基于 MATLAB 的几何图形绘制和数值计算

微分几何是研究几何对象的数学分支，因此图形对微分几何的研究发挥着重要的辅助作用。MATLAB 是由美国 MathWorks 公司在 1984 年推出的一款具有数值计算和可视化功能的计算机数学软件。实践证明，MATLAB 可以作为微分几何研究的重要数学软件工具。借助 MATLAB 绘制的图形，我们可以更加直观地理解微分几何的相关理论，同时也可微分几何在数学其他分支、力学、工程等领域的应用奠定基础。

历经 20 余年的版本更新，MATLAB 的功能日益完善。它是科学研究和工程应用领域应用最广泛的三大数学软件之一（另外两种软件为 Mathematica 和 Maple）。MATLAB 具有功能强大、操作方便、简单易学、计算精度高等特点。在图形方面，MATLAB 提供了 300 多个与图像相关的函数，可实现数据可视化、图像分析、图像处理等功能。

本节将介绍 MATLAB 的基本绘图功能，并且基于 MATLAB 绘制一些经典的曲线、曲面。同时，本书其他章节中的部分图形也将使用 MATLAB 进行绘制。

### 1.5.1 MATLAB 用户环境介绍

MATLAB 的用户界面包含历史命令窗口（Command History）、命令行窗口（Command Win-

dow)、当前目录浏览器 (Current Directory Browser)、工作空间浏览器 (Workspace Browser)、目录分类窗口 (Launch Pad)、数组编辑器 (Array Editor)、M 文件编辑器/调试器 (Editor/Debugger)、超文本帮助浏览器 (Help Navigator/Browser)。它的这些窗口内嵌在 MATLAB 主窗体中, 组成了 MATLAB 的用户界面。

当 MATLAB 命令窗口中出现系统提示符 “>>” 后, 就可以输入命令了。MATLAB 的交互性在于: 在输入命令后, MATLAB 系统会马上进行解释、执行用户输入的命令并输出运算结果等工作。如果不想立即得到结果, 可在程序语句结尾处加分号 “;”。如果用户输入的命令有错误, MATLAB 系统会及时地给出提示信息, 方便编程用户及时修改调试。

MATLAB 程序命令的一般形式为: 变量=表达式。其中, 变量是以字母开始的, 最多可达 31 位。这些变量可以是字母和数字, 但是不能使用空格和逗号等, 也不能与预定义的变量重复。而表达式则由操作符、其他特殊字符、函数和变量名 4 部分组成。MATLAB 将表达式执行后会将执行结果显示于命令后, 并且将其存在变量中以供下一次使用。如果将变量名后的等号 “=” 省略, 即表示不指定返回变量, 此时 MATLAB 系统通过名为 ans 的变量将自动获得并输出运算结果。

MATLAB 中的数学运算符有: 加法+, 减法-, 除法/, 乘法\*, 幂^。MATLAB 可以支持所有的常用数学函数, 但某些函数输入形式与通常习惯不同。例如, 反三角函数 asin、acos、asec 等。

MATLAB 程序指令中的符号及其作用如表 1.5.1 所示。

表 1.5.1 MATLAB 程序指令中的符号及其作用

符 号	作 用
空格	主要起分隔作用, 输入量和数组之间的分隔
逗号,	分隔作用, 指令之间的分隔, 与空格的分隔不同
分号;	数组间的行分隔符, 指令结尾, 则不显示运行结果
百分号%	后面为注释文字
括号[]	用于数组输入时用

### 1.5.2 基于 MATLAB 的平面曲线绘制

MATLAB 的 plot 函数是绘制平面曲线的主要工具。其命令形式为:

plot(x)	%绘制以 x 为纵坐标的二维曲线
plot(x, y)	%绘制以 x 为横坐标, y 为纵坐标的二维曲线

当 x 和 y 都是 n 维数值向量时, plot(x,y) 命令在窗口的坐标系中绘制出一条将点 (x(i),y(i)) 依次用直线段连接而成的折线。如果这些点足够密, 这条折线看起来就是一条曲线, 也就绘制出了平面曲线的图形。这就是 MATLAB 绘制曲线的工作原理。

在用 plot(x,y) 绘制函数的图像时, 我们应先用  $x = a:h:b$  的命令形式获得函数  $y = f(x)$  的自变量 x 在绘图区间上 [a,b] 的分割点 x(i) 的数据。其中, h 为分割的步长, 其值选取得越小, 构成绘制该曲线的折线点越多, 曲线看起来也就越光滑。但是, 如果分割步长 h 选取得太小, 会增加运算量, 进而降低绘图的速度。一般取步长 h 等于 0.1 较为合适, 可以兼顾绘图效果和绘图速度。

在绘图时, 可利用基本绘图控制参数进行添加坐标分割线、控制曲线的线型和颜色、图

形标注等操作。例如，要控制曲线的线型和颜色，我们可采用 `plot(x, y, '控制参数字符')` 的命令形式。其中，控制参数字符如表 1.5.2 所示。

表 1.5.2 控制参数字符

曲线线型		曲线颜色		曲线颜色	
字 符	线 型	字 符	颜 色	字 符	颜 色
-	实线	w	白色	y	黄色
:	点线	k	黑色	g	绿色
--	虚线	b	蓝色	m	红紫色
-.	点划线	r	红色	c	蓝绿色

在大多数情况下，给窗口添加坐标分割线可以使得图形的效果更为直观。可通过在 `plot(x, y, '控制参数字符')` 后添加 `grid on` 和 `grid off` 命令形式来实现在图中添加和消除坐标分割线的操作。

在当前坐标系中绘图时，每调用一次 `plot` 函数，会擦掉图形窗口中已有的图形。有时，在绘制完一条曲线的图形后，需要在该坐标系和图形上再画出另外一条曲线的图像。此时，可利用 `hold on` 和 `hold off` 命令完成该任务。其中，`hold on` 命令可保留当前窗口中的坐标系和图形，将之后绘制的图形叠放在当前图形上。而 `hold off` 命令则让 MATLAB 清除当前窗口中的坐标系和图形，绘制新的图形。

图形的文字标注是指在图形中添加标识性的注释，可以通过命令对图名、坐标轴和曲线等进行标注。例如，要在图形的顶端加注文字，可通过命令形式 `title('名称')` 来进行。而以下命令形式则可以对坐标轴加注文字：

```
xlabel('文字') 在 x 轴旁加注文字
ylabel('文字') 在 y 轴旁加注文字
zlabel('文字') 在 z 轴旁加注文字
```

利用 `text(x, y, '文字')` 和 `text(x, y, z, '文字')` 的命令形式可分别在平面曲线的点  $(x, y)$  和空间曲线的点  $(x, y, z)$  处加注文字，如点的坐标等。当多条曲线出现在同一幅图中时，可利用命令 `legend('文字 1', '文字 2', ...)` 对各条曲线的线性、颜色、含义和名称等属性进行标注加以区别。

`plot(x1, y1, '参数字符 1', x2, y2, '参数字符 2', ...)` 可在同一窗口中绘制出多条平面曲线图形，并且第  $i$  条曲线的线型和颜色等属性被参数字符  $i$  所控制。

1.5.3 基于 MATLAB 的空间曲线绘制

MATLAB 内置的 `plot3` 命令用以绘制空间曲线，其基本命令格式为：

```
plot3(x, y, z, '参数字符') %绘制以 x 为横坐标、y 为纵坐标的空间曲线
```

而 `plot3(x1, y1, z1, '参数字符 1', ...)` 可以在同一图形窗口绘制出多条空间曲线，其中第  $i$  条曲线的线型和颜色等属性由参数字符  $i$  所控制。

**【例 1.5.1】** 绘制螺线  $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ， $t \in [0, 10\pi]$  的图像。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
%绘制圆柱螺线
ezplot3('cos(t)', 'sin(t)', 't', [0, 10*pi])
```

MATLAB 所绘制的图像如图 1.5.1 所示。

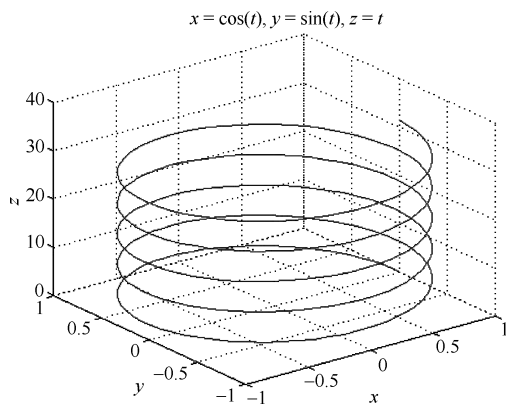


图 1.5.1 例 1.5.1 MATLAB 绘制的图像

当需要绘制多个图形时，需要指定图形窗口和子图，或者在同一个图形窗口中层叠绘制图形。需要多个图形窗口同时打开，可以使用 **figure** 语句，其命令格式为：

**figure(n)**    %产生新图形窗口

如果需要在同一个图形窗口中布置几幅独立的子图，可以在 **plot** 命令前加上 **subplot** 命令来将一个图形窗口划分为多个区域，每个区域一幅子图。**subplot(m,n,i)**命令可将图形窗口分为  $m \times n$  个子图，并将第  $i$  个子图作为当前图形的绘制窗口。子图的序号编排原则是：左上方为第一幅，先向右后向下依次排列，子图间彼此独立。该命令的基本格式为：

**subplot(m,n,i)**    %使  $m \times n$  幅子图中的第  $i$  幅成为当前图

**【例 1.5.2】** 在同一图形窗口中绘制出圆柱螺线  $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ， $t \in [0, 10\pi]$  和  $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ ， $t \in [0, 10\pi]$ 。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
%绘制圆柱螺线
t1=0:pi/25:10*pi;
x1=sin(t1); y1=cos(t1); z1=t1;
subplot(1,2,1), plot3(x1,y1,z1,'r')
title('圆柱螺线'), xlabel('x 轴'), ylabel('y 轴'), zlabel('z 轴')
%绘制空间曲线
t=0:0.1:10*pi;
x2=(cos(t)).^3; y2=(sin(t)).^3; z2=cos(2*t);
subplot(1,2,2), plot3(x2,y2,z2,'k')
title('空间曲线'), xlabel('x 轴'), ylabel('y 轴'), zlabel('z 轴')
```

MATLAB 绘制出的图像如图 1.5.2 所示。

## 1.5.4 基于 MATLAB 的曲面绘制

MATLAB 内置的 **meshgrid**、**mesh** 和 **surf** 等命令是绘制曲面图形的主要工具。例如，要绘制定义在矩形区域  $D=[x_0, x_m] \times [y_0, y_n]$  上的二元函数  $z=f(x, y)$  所对应的曲面图形，MATLAB 处理的过程和原理是：将  $[x_0, x_m]$  和  $[y_0, y_n]$  分别分成  $m$  份和  $n$  份，从而  $D$  将分成  $m \times n$  个小矩形，每个小矩形有 4 个顶点，这些顶点称为格点。而 **meshgrid** 命令就用来生成这些格点坐标的矩阵（格点矩阵）。在此之后，再利用 **mesh** 命令绘制对应的曲面网格图，或利用 **surf**

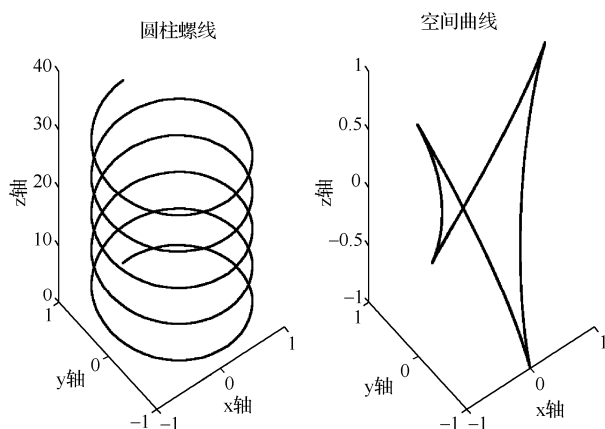


图 1.5.2 例 1.5.2 MATLAB 绘制的图像

命令绘制曲面表面图。当生成的格点越多时，生成的面看起来越光滑，但这会增加计算量，进而影响绘图的速度。常用的绘图命令形式如下：

<code>[X,Y]=meshgrid(x,y)</code>	生成绘制平面图形所需要的小矩形格点
<code>[X,Y]=meshgrid(x)</code>	等价于命令 <code>[X,Y]=meshgrid(x,x)</code>
<code>[X,Y,Z]=meshgrid(x,y,z)</code>	生成绘制空间图形所需要的小矩形格点
<code>[X,Y,Z]=meshgrid(x)</code>	等价于命令 <code>[X,Y,Z]=meshgrid(x,x,x)</code>

`mesh` 和 `surf` 的调用命令形式相同。

**【例 1.5.3】** 绘制球面  $\vec{r} = \{\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u\}$  的图像。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
% 球面
u=-pi/2:0.1:pi/2;
v=0:0.1:2*pi;
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=cos(u).*cos(v);
y=cos(u).*sin(v);
z=sin(u);
mesh(x,y,z);
axis equal
```

MATLAB 绘制出的图像如图 1.5.3 所示。

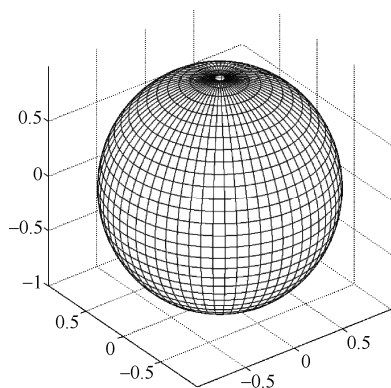


图 1.5.3 例 1.5.3 MATLAB 绘制的图像

**【例 1.5.4】** 绘制正螺面  $\vec{r} = \{\sin u \cos v, \sin u \sin v, v\}$  的图像。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
% 正螺面
u=1:0.1:5;
v=0:0.1:2*pi;
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=sin(u).*cos(v);
y=sin(u).*sin(v);
z=v;
mesh(x,y,z);
```

MATLAB 绘制出的图像如图 1.5.4 所示。

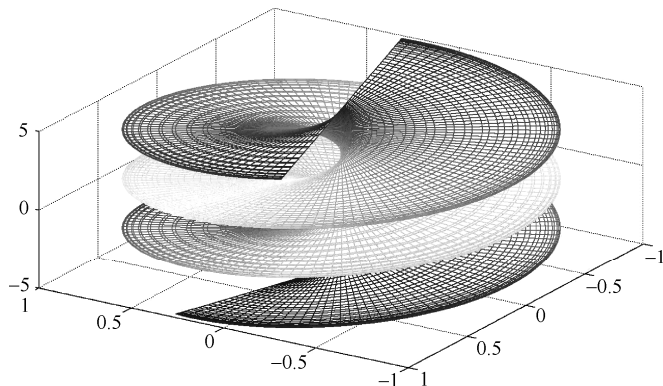


图 1.5.4 例 1.5.4 MATLAB 绘制的图像

**【例 1.5.5】** 绘制伪球面  $\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln \left( \tan \frac{u}{2} \right) + \cos u \right\}$  的图像。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
% 伪球面
u=1:0.1:10;
v=0:0.1:2*pi;
[u,v]=meshgrid(u,v);
x=sin(u).*cos(v);
y=sin(u).*sin(v);
z=log(tan(u/2))+cos(u);
mesh(x,y,z)
```

MATLAB 绘制出的图像如图 1.5.5 所示。

从图 1.5.5 中可看出，伪球面（pseudosphere）是形如喇叭或草帽的特殊曲面。实际上，计算可知：伪球面的高斯曲率为负常数。

伪球面不仅性质特殊，而且还对应着几何学的一段重要进展。1868 年，意大利数学家贝爾特拉米 (E. Beltrami, 1835—1900 年) 发表了论文《非欧几何的明智解释》(Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea)。在论文中，他指出伪球面可作为双曲几何的实现模型。贝爾特拉米的工作促使罗巴切夫斯基的非欧几何思想被更多的人所理解和接受，推动了几何学的发展。

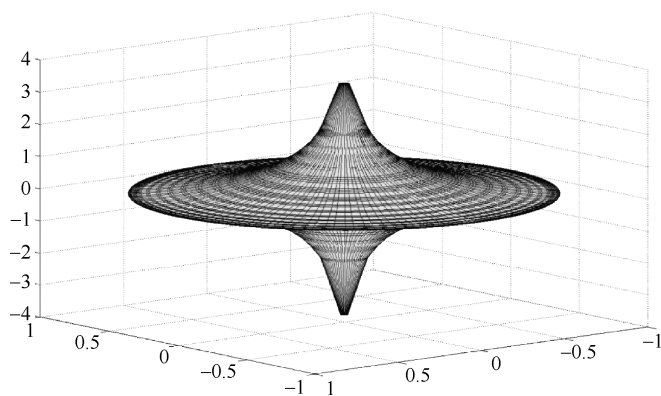


图 1.5.5 例 1.5.5 MATLAB 绘制的图像

**【例 1.5.6】** 绘制莫比乌斯带的图像，并旋转图像，观察其不可定向性。

解：MATLAB 程序代码如下：

```
% 莫比乌斯带
t=0:0.1:2.01*pi;
v=-1:0.1:1;
[v,t]=meshgrid(v,t);
r=2+0.5*v.*cos(t/2);
x=r.*cos(t);
y=r.*sin(t);
z=0.5*v.*sin(t/2);
mesh(x,y,z)
title('莫比乌斯带')
xlabel('x 轴')
ylabel('y 轴')
zlabel('z 轴')
```

MATLAB 绘制出的图像如图 1.5.6~图 1.5.10 所示。从这些图中可以很好地观察到莫比乌斯带的单侧特性。这也印证了在 1.4 节中关于莫比乌斯带的曲面定向讨论。

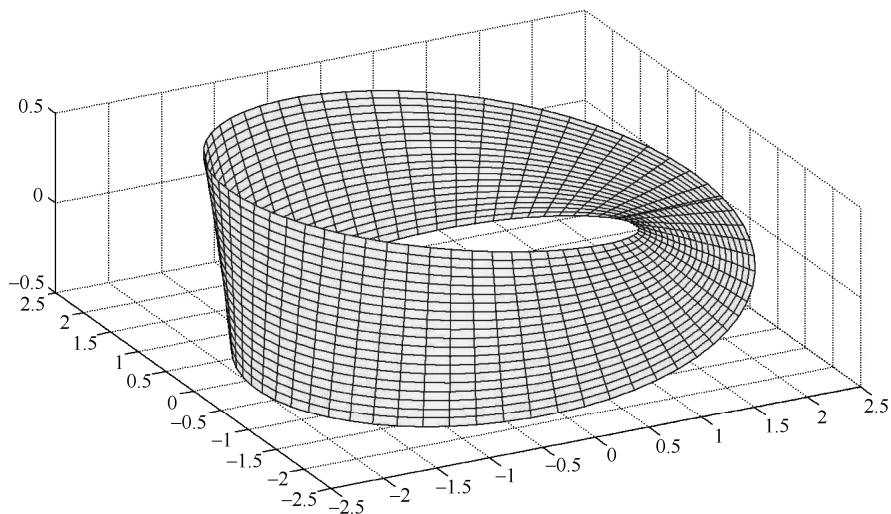


图 1.5.6 例 1.5.6 MATLAB 绘制的图像 1



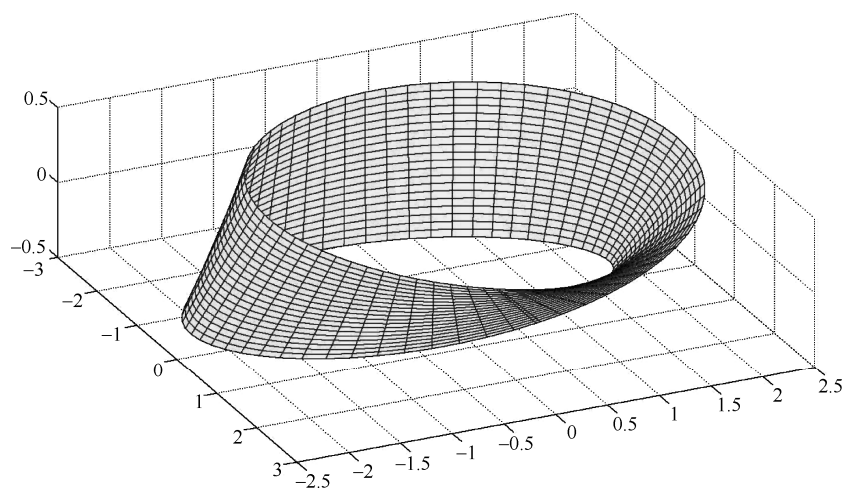


图 1.5.7 例 1.5.6 MATLAB 绘制的图像 2

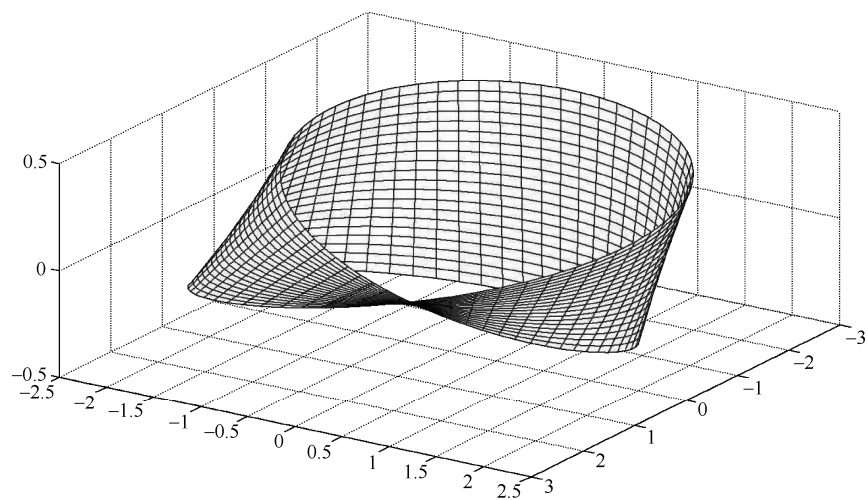


图 1.5.8 例 1.5.6 MATLAB 绘制的图像 3

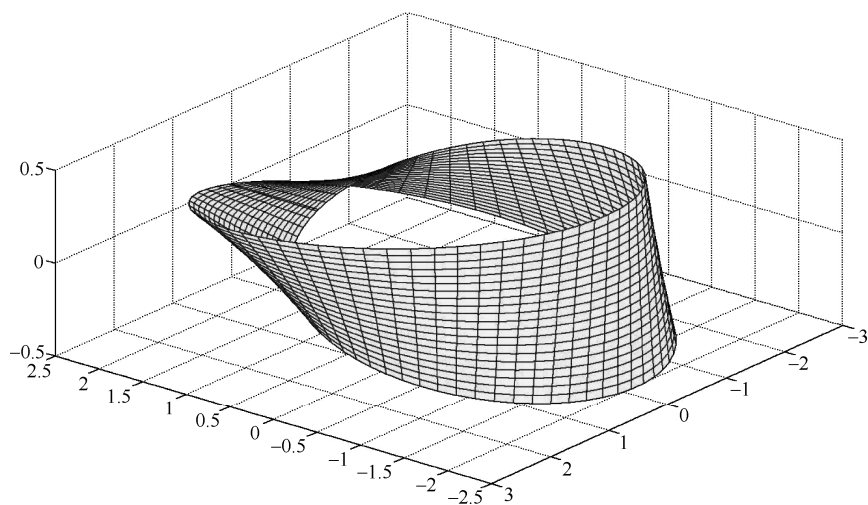


图 1.5.9 例 1.5.6 MATLAB 绘制的图像 4

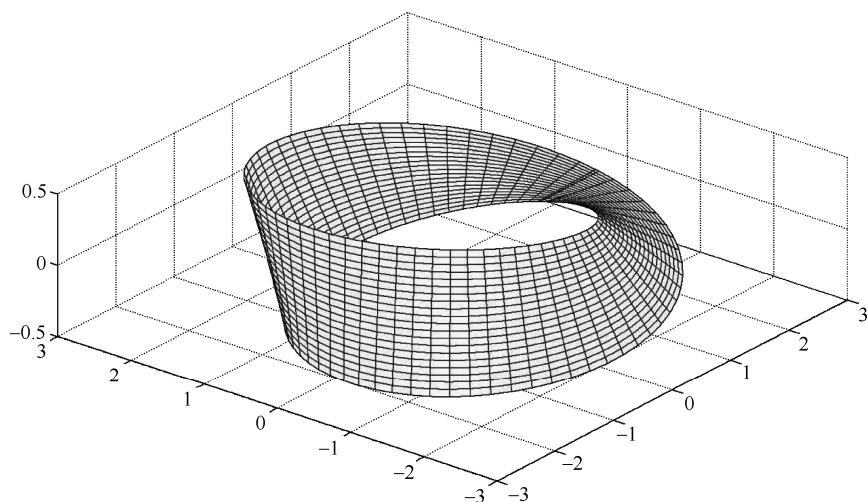


图 1.5.10 例 1.5.6 MATLAB 绘制的图像 5

### 1.5.5 基于 MATLAB 的微分几何数值计算

利用 MATLAB 的数值计算功能，可以解决古典微分几何中的许多几何量的计算问题。可以利用 MATLAB 来求曲线的曲率、曲线的挠率、曲线段的弧长、曲面域的面积、曲面高斯曲率和平均曲率等。下面以求螺线  $\vec{r} = \{\cos t, \sin t, t\}$  的曲率和挠率为例。

根据曲线在一般参数下的曲率公式  $\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}$ ，求螺线曲率的 MATLAB 源程序如下：

```
%螺线的曲率
>> syms t; r=[sin(t),cos(t),t];r1=diff(r);r2=diff(r1);
>> syms t; r=[sin(t),cos(t),t];r1=diff(r);r2=diff(r1);
>> k=mo(cross(r1,r2))/(mo(r1))^3
k =
1/2
```

其中，mo 为子函数，将其写在 M 文件中：

```
function moshu=mo(r);
sum=0;
for i=1:3
sum=sum+(r(i))^2
end;
moshu=simple(sum^(1/2))
```

根据曲线在一般参数下的挠率公式  $\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2}$ ，求螺线挠率的 MATLAB 源程序如下：

```
%螺线的挠率
>>syms t;
r=[sin(t),cos(t),t];
r1=diff(r);r2=diff(r1);r3=diff(r2);
C=[r1;r2;r3];
nao=det(C)/(mo(cross(r1,r2)))^2;
```

```
simple(nao)
ans =
-1/2
```

通过上述讨论可以发现: MATLAB 可以帮助我们高效地解决微分几何中的一些图形绘制和数值计算问题。在使用 MATLAB 的过程中,应合理地选择参数、构建命令组合、调用相关的工具箱、调整绘图的视角、渲染图形等。这样才能获得理想的几何图形和数值计算结果。学习微分几何的一条事半功倍的途径是将微分几何的理论学习与 MATLAB 的软件验证有机结合。

## 习 题 1

- 求圆柱螺线  $\vec{r} = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$  在  $t = 0$  处的法平面、密切平面和从切平面的方程。
- 证明曲线  $\vec{r} = \{\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t\}$  上任一点处的法平面通过坐标原点。
- 求下列曲线的曲率和挠率:
  - $\vec{r} = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt\}$ ;
  - 悬链线:  $\vec{r} = \left\{t, a \cosh \frac{t}{a}, 0\right\}$ ;
  - $\vec{r} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t\right\}$ 。
- 证明: 曲线是圆的一部分当且仅当它的挠率  $\tau$  是 0, 曲率  $\kappa$  是大于 0 的常数。
- 证明: 双曲螺线  $\vec{r} = \{\cosh t, \sinh t, t\}$  的曲率和挠率相等。
- 计算下列曲面的第二基本形式:
  - 双曲抛物面:  $\vec{r} = \{3(u + v), 3(u - v), 2uv\}$ ;
  - 悬链面:  $\vec{r} = \{\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})\}$ 。
- 求双叶双曲面  $\vec{r} = \{a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u\}$  的第二基本形式和高斯曲率。
- 计算曲面  $\vec{r} = \{\cos u \cos v, \sin u \cos v, u + \sin v\}$  的高斯曲率和平均曲率。
- 计算环面:  $\vec{r} = \{(R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u\}$ ,  $0 \leq u, v \leq 2\pi$  的高斯曲率和平均曲率。求环面高斯曲率的最大值和最小值。利用 MATLAB 绘制出环面的图形。
- 编制 MATLAB 程序计算曲面  $\vec{r} = \{u \sin v, u \cos v, bv\}$  的高斯曲率和平均曲率。
- 证明: Enneper 曲面  $\vec{r} = \left\{u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right\}$  是极小曲面。利用 MATLAB 绘制出 Enneper 曲面的图形。
- 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  和柱面  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$  的交线是著名的维维安尼曲线 (Viviani curve)。写出维维安尼曲线的参数方程, 并计算其曲率和挠率。利用 MATLAB 绘制出上述球面、柱面和维维安尼曲线。

# 张量代数和外形式

纯粹数学的建构可以使我们发现观念和它们之间联系的法则，开启我们对自然现象的理解。

——爱因斯坦

物理学和数学中的一些重要的量既非数量也非向量，它们在指标变换下遵循特殊的变换规律。这类量就是所谓的张量。张量可看成是数量和向量的推广。“张量”(tensor)一词最早是由爱尔兰数学家哈密顿(W. R. Hamilton, 1805—1865年)在1846年引入的，但他当时将该词用于指代现在称为“模”的代数对象。该词的现代用法是在1899年由另一位数学家开始使用的。张量的运算包括张量代数和张量分析。张量代数主要研究张量的加法、数乘、缩并和指标的变换等。

考虑到我们可以在局部上用线性映射逼近非线性映射，物理学中的多数量都可以用张量表示。例如，转动惯量张量、能量动量张量、极化张量等。张量也被广泛用于力学中，例如，力学中的应变张量、应力张量都是二阶张量。事实上，“张量”一词的拉丁语“tendere”意为“拉紧”，表示引起张力的某种拉伸。1913年，美国物理学家爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955年)和数学家格罗斯曼(M. Grossmann, 1878—1936年)在他们合著的《广义相对论和引力论纲要》(*Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*)中，将张量分析作为广义相对论的重要数学基础和工具之一。

在数学中，我们熟悉的数量和向量都是张量的特殊情形：数量是零阶张量，而向量是一阶张量。微分几何中的重要张量包括度量张量、曲率张量等。黎曼几何就是在微分流形上指定了黎曼度量这个特殊张量的基础上建立起来的。而外形式是具有反对称性的协变张量。

本章首先利用多重线性函数给出张量的概念，并研究张量的张量积、缩并等代数运算和一类特殊的张量——度量张量，然后讨论张量的对称性，最后引入外形式和外积运算。

## 2.1 对偶空间与多重线性函数

对偶向量和多重线性函数是构造张量的基础。本节将讨论对偶空间的概念和性质，以便为之后讨论张量空间打下基础。

### 2.1.1 对偶空间

考虑一个 $n$ 维向量空间 $V$ ，设 $\{e_i\}$ 和 $\{e_i^*\}$ 为 $V$ 的两组基底，且 $e_i^* = a_i^j e_j$ ，即

$$\begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ \vdots \\ e_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1'}^1 & a_{1'}^2 & \cdots & a_{1'}^n \\ a_{2'}^1 & a_{2'}^2 & \cdots & a_{2'}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n'}^1 & a_{n'}^2 & \cdots & a_{n'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

$\forall v \in V$ , 有  $v = v^i e_i$ 。而  $v = v^{i'} e_{i'} = v^{i'} a_{i'}^i e_i$ , 所以, 有  $v^i = a_{i'}^i v^{i'}$ 。将其写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1'}^1 & \cdots & a_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1'}^n & \cdots & a_{n'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

由此可得:

$$\begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T)^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

由此可知, 向量  $v \in V$  的分量变换矩阵是  $V$  的基底变换矩阵的转置逆矩阵。对于这种情况, 称向量空间  $V$  中的  $v$  的分量遵守反变(逆变)变换规律。

**定义 2.1.1(对偶空间)** 设  $V$  为一个向量空间, 若映射  $\alpha: V \rightarrow R$  满足:  $\forall v_1, v_2 \in V, \lambda \in R$ , 有  $\alpha(v_1 + \lambda v_2) = \alpha(v_1) + \lambda \alpha(v_2)$ , 称  $\alpha$  为向量空间  $V$  上的线性函数。令  $V^*$  为向量空间  $V$  上的所有线性函数构成的几何, 在  $V^*$  中定义加法与数乘运算, 即对  $\alpha, \beta \in V^*, v \in V, \lambda \in R$ , 有:

$$(1) (\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$$

$$(2) (\lambda \alpha)(v) = \lambda \alpha(v)$$

则称  $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间 (dual space)。

利用向量空间的定义, 可验证对偶空间  $V^*$  是一个向量空间。例如: 由

$$(\lambda(\alpha + \beta))(v) = \lambda(\alpha + \beta)(v) = \lambda(\alpha(v) + \beta(v)) = \lambda \alpha(v) + \lambda \beta(v)$$

可知  $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda \alpha + \lambda \beta$ , 即满足向量空间的定义要求。

关于向量空间  $V$  的对偶空间  $V^*$  的结构, 有如下定理。

**定理 2.1.1** 设  $\{e_i\}$  为  $n$  维向量空间  $V$  的一组基底,  $\omega^1, \dots, \omega^n$  是向量空间  $V^*$  的一组满足如下条件的向量:

$$\omega^i(e_j) = \langle \omega^i, e_j \rangle = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1.4)$$

那么,  $\{\omega^i\}$  是向量空间  $V^*$  的一组基底。称  $\{\omega^i\}$  为  $\{e_i\}$  的一组对偶基。

**证明:** 对  $\forall v \in V$ , 设  $v = v^i e_i$ , 则:

$$\omega^j(v) = \omega^j(v^i e_i) = v^i \omega^j(e_i) = v^i \delta_i^j = v^j \quad (2.1.5)$$

所以, 有  $v = \omega^i(v) e_i$ 。对  $\forall \alpha \in V^*$ , 有:

$$\alpha(v) = \alpha(v^i e_i) = v^i \alpha(e_i) = \alpha_i \omega^i(v) \quad (2.1.6)$$

因此,  $\alpha = \alpha_i \omega^i$ , 其中  $\alpha_i = \alpha(e_i)$ 。即对偶空间  $V^*$  中的每个元素  $\alpha$  都可以被  $\omega^1, \dots, \omega^n$  线性表出。

下面再来验证  $\omega^1, \dots, \omega^n$  是线性无关的。将  $k_1 \omega^1 + k_2 \omega^2 + \dots + k_n \omega^n = 0$  的两边作用于  $e_i$ , 有:

$$(k_1\omega^1 + k_2\omega^2 + \cdots + k_n\omega^n)(e_i) = 0 \quad (2.1.7)$$

由式 (2.1.4) 可得:  $k_i = 0$ 。

综上可知,  $\omega^1, \cdots, \omega^n$  是对偶空间  $V^*$  的一组基底。证毕。

下面来研究对偶空间中的向量随基底变化的变换规律。注意到:

$$\alpha_{i'} = \alpha(e_{i'}) = \alpha(a_i^i e_i) = a_i^i \alpha(e_i) = a_i^i \alpha_i \quad (2.1.8)$$

将其写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i'} \\ \vdots \\ \alpha_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i'}^1 & a_{i'}^2 & \cdots & a_{i'}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n'}^1 & a_{n'}^2 & \cdots & a_{n'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

这表明向量  $\alpha \in V^*$  的分量变换矩阵与向量空间  $V$  的基底变换矩阵一致。称  $V^*$  中的向量  $\alpha \in V^*$  遵守协变 (共变) 变换规律。

**定理 2.1.2** 向量空间  $V$  的对偶空间  $V^*$  的对偶空间是  $V$ , 即  $V^{**} = V$ , 其中  $V^{**} = (V^*)^*$ 。

**证明:** 对  $\forall v \in V$ , 令  $v: V^* \rightarrow R$ ,  $\alpha \mapsto v(\alpha) = \alpha(v)$ , 则  $\alpha$  满足:

$$\begin{aligned} v(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) &= (\alpha_1 + \lambda \alpha_2)(v) = \alpha_1(v) + \lambda \alpha_2(v) \\ &= v(\alpha) + \lambda v(\alpha_2) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

所以,  $v$  是向量空间  $V^*$  上的线性函数, 即  $v \in V^{**}$ 。

另一方面, 对  $\forall f \in V^{**}$ , 即向量空间  $V^*$  上的任一个线性函数  $f$ , 存在  $v = f(\omega^i) e_i \in V$ , 使得  $\forall \alpha = \alpha(e_i) \omega^i \in V^*$ , 有:

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \alpha(v) = \alpha(f(\omega^i) e_i) = f(\omega^i) \alpha(e_i) \\ &= f(\alpha(e_i) \omega^i) = f(\alpha) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

从而, 有  $f = v \in V$ 。

综上可知,  $V^{**} = V$ 。证毕。

**【例 2.1.1】** 设  $e_1, \cdots, e_n$  为向量空间  $V$  的一组基, 则对  $\forall v \in V$ , 有  $v = \sum_i b^i(v) e_i$ , 其中  $b^i(v) \in R$ 。设  $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$  为向量空间  $V$  的对偶空间  $V^*$  的基, 则:

$$\begin{aligned} \alpha^i(v) &= \alpha^i \left( \sum_j b^j(v) e_j \right) = \sum_j b^j(v) \alpha^i(e_j) \\ &= \sum_j b^j(v) \delta_j^i = b^i(v) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

由此可知  $\alpha^i = b^i$ 。所以, 向量  $v$  关于基底  $e_1, \cdots, e_n$  的坐标函数  $b^1, \cdots, b^n$  为  $e_1, \cdots, e_n$  的对偶基。

## 2.1.2 多重线性函数

多重线性函数是一种特殊的多种线性映射, 也是定义张量的基础。

从前面的讨论可以看出, 向量空间  $V$  和对偶空间  $V^*$  都可以视为线性函数的集合。所以, 可以从线性函数的角度对它们进行统一理解:

$$V^* = \{ \alpha | \alpha: V \rightarrow R \text{ 为线性函数} \}$$

$$V = \{v | v: V^* \rightarrow R \text{ 为线性函数}\}$$

在此基础上, 可将向量空间之间的线性函数概念推广。

**定义 2.1.2 (多重线性函数)** 设  $V_1, \dots, V_r$  是  $r$  个向量空间, 若直积空间  $V_1 \times \dots \times V_r$  上的  $r$  元函数  $f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow R$  对每个自变量都是  $R$  线性的, 即对  $\forall \lambda, \mu \in R, u_k, v_k \in V$ , 有:

$$f(\dots, \lambda u_k + \mu v_k, \dots) = \lambda f(\dots, u_k, \dots) + \mu f(\dots, v_k, \dots), \quad 1 \leq k \leq r$$

则称  $f$  是  $V_1 \times \dots \times V_r$  上的  $r$  重线性函数。记  $V_1 \times \dots \times V_r$  上的  $r$  重线性函数构成的集合为  $L(V_1, \dots, V_r; R)$ 。

这样, 利用上述表述方法, 有:  $V^* = L(V; R)$ ,  $V = L(V^*; R)$ 。

**【例 2.1.2】** 向量空间  $R^n$  中的点乘: 对  $v = v^i e_i, w = w^j e_j \in R^n$

$$f(v, w) = v \cdot w = \sum_{i=1}^n v^i w^i \quad (2.1.13)$$

它是双线性的。

**【例 2.1.3】** 对  $v_i = v_i^j e_j \in R^n, i = 1, \dots, n$ , 用向量  $v_i$  的分量作为列向量构造行列式, 有:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1, \dots, v_n] = \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{vmatrix} \quad (2.1.14)$$

是  $n$  重线性的。

## 2.2 张量与张量代数

张量具有明确的物理和力学背景, 同时它也是几何学的重要研究对象。本节将给出张量的定义并讨论张量积等张量间的运算。另外, 还将研究欧氏空间上的一类特殊的张量——度量张量。

### 2.2.1 张量及其表示

**定义 2.2.1 (张量)** 设  $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间, 称  $r+s$  重线性函数:

$$\tilde{f}: \overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^{r \uparrow} \times \overbrace{V \times \dots \times V}^{s \uparrow} \rightarrow R \quad (2.2.1)$$

为向量空间  $V$  上的  $(r, s)$  型张量 (tensor)。记向量空间  $V$  上的所有  $(r, s)$  型张量构成的集合为:

$$L(\overbrace{V^*, \dots, V^*}^{r \uparrow}, \overbrace{V, \dots, V}^{s \uparrow}; R)$$

**【例 2.2.1】** 设  $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间, 求证:  $L(V^*, V; R) \cong \text{Hom}(V)$ , 其中  $\text{Hom}(V)$  表示向量空间  $V$  到自身的所有线性映射构成的集合。

**证明:** 设  $f: V \rightarrow V$  为向量空间  $V$  上的线性变换, 即对  $\forall v_1, v_2 \in V, \lambda \in R$ , 满足:

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2) \quad (2.2.2)$$

令映射  $\tilde{f}: V^* \times V \rightarrow R$  为  $\tilde{f}(\alpha, v) = \alpha(f(v))$ 。易知,  $\tilde{f}$  是双线性的。

反之, 对双线性函数  $\tilde{f}: V^* \times V \rightarrow R$  可构造向量空间  $V$  上的线性变换:  $f: V \rightarrow V$ , 定义为  $f(v) = \tilde{f}(\omega^i, v)e_i$ , 其中  $\{e_i\}$  为向量空间  $V$  的基底,  $\{\omega^i\}$  为  $\{e_i\}$  对偶基底。

从而, 有  $L(V^*, V; R) \cong \text{Hom}(V)$ 。证毕。

下面来考查向量空间到自身的线性变换  $f: V \rightarrow V$  分量随基底的变换规律。设  $\{e_i\}$  为向量空间  $V$  的一组基底,  $\{e_{i'}\}$  为向量空间  $V$  的另外一组基底, 满足  $e_{i'} = a_{i'}^i e_i$ ,  $f(e_i) = b_i^j e_j$ , 则

$$f(e_{i'}) = b_{i'}^j e_j = b_{i'}^{j'} a_{j'}^j e_j \quad (2.2.3)$$

$$f(a_{i'}^i e_i) = a_{i'}^i f(e_i) = a_{i'}^i b_i^j e_j \quad (2.2.4)$$

由此可知, 有:

$$a_{i'}^i b_i^j = b_{i'}^{j'} a_{j'}^j$$

即

$$b_{i'}^{j'} = a_{i'}^i b_i^j a_{j'}^j \quad (2.2.5)$$

表示为矩阵:

$$b_{i'}^{j'} = \begin{pmatrix} a_{i'}^1 & a_{i'}^2 & \cdots & a_{i'}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i'}^1 & a_{i'}^2 & \cdots & a_{i'}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{j'} & \cdots & a_1^{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{j'} & \cdots & a_n^{n'} \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

**定义 2.2.2 (张量的分量)** 设  $\{e_i\}$  为向量空间  $V$  的基底,  $\{\omega^i\}$  为  $\{e_i\}$  的对偶基, 则对  $\forall v \in V$ , 有  $v_k = v_k^i e_i$ ,  $1 \leq k \leq r$ 。  $\forall \alpha \in V^*$ , 有  $\alpha^l = \alpha_i^l \omega^i$ ,  $1 \leq l \leq s$ 。那么, 对  $\forall f \in L(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r \uparrow}, \underbrace{V, \dots, V}_{s \uparrow}; R)$ , 有:

$$\begin{aligned} f(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) &= f(\alpha_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}^r \omega^{i_r}, v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_s^{j_s} e_{j_s}) \\ &= \alpha_{i_1}^1 \cdots \alpha_{i_r}^r v_1^{j_1} \cdots v_s^{j_s} f(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \\ &= f_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1}^1 \cdots \alpha_{i_r}^r v_1^{j_1} \cdots v_s^{j_s} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

称  $f_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$  为  $(r, s)$  型张量  $f$  的分量。

可以验证, 张量  $f$  的分量上指标遵守反变变换规律, 下指标遵守共变变换规律。即设  $\{e_i\}$  和  $\{\tilde{e}_{i'}\}$  为向量空间  $V$  的两组基底,  $\{\omega^i\}$  和  $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$  分别为  $\{e_i\}$  和  $\{\tilde{e}_{i'}\}$  的对偶基底, 满足如下变换规律:  $e_{i'} = a_{i'}^i e_i$  和  $\tilde{\omega}^{i'} a_{i'}^i = \omega^i$ ,  $(r, s)$  型张量  $f$  的分量分别为  $f_{i_1 \cdots i_s}^{k_1 \cdots k_r}$  和  $f_{j_1 \cdots j_s}^{i'_1 \cdots i'_r}$ , 则张量  $f$  的在不同坐标基底下的分量满足:

$$f_{j_1' \cdots j_s'}^{i'_1 \cdots i'_r} = f_{i_1 \cdots i_s}^{k_1 \cdots k_r} a_{k_1}^{i'_1} \cdots a_{k_r}^{i'_r} a_{j_1}^{i_1} \cdots a_{j_s}^{i_s} \quad (2.2.8)$$

事实上, 也可以据此给出分量形式的张量定义, 该定义与定义 2.2.1 是等价的。

## 2.2.2 张量积和张量代数

我们先对多重线性函数引入加法、数乘运算。

**定义 2.2.3 (多重线性函数的加法和数乘)** 设  $\forall f_1, f_2 \in L(V_1, \dots, V_r; R)$ ,  $\lambda \in R$ , 多重线性函数的加法和数乘运算定义为:



$$\begin{cases} (f_1 + f_2)(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1, \dots, v_r) + f_2(v_1, \dots, v_r) \\ (\lambda f_1)(v_1, \dots, v_r) = \lambda f_1(v_1, \dots, v_r) \end{cases} \quad (2.2.9)$$

特别地，可定义张量的加法、减法与数乘运算。

**定义 2.2.4 (张量的加法、减法和数乘)** 设  $\forall f_1, f_2 \in L(\overbrace{V^*, \dots, V^*}^{r\uparrow}, \overbrace{V, \dots, V}^{s\uparrow}; R)$ ,  $\lambda \in R$ , 张量的加法、减法和数乘运算定义为:

$$\begin{cases} (f_1 \pm f_2)(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) = f_1(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \pm f_2(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \\ (\lambda f_1)(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) = \lambda f_1(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \end{cases}$$

$$\forall \alpha^i \in V^* (1 \leq i \leq r), \quad v_j \in V (1 \leq j \leq s)$$

**定义 2.2.5 (对偶向量间的张量积)** 设  $V$  和  $W$  为两个向量空间, 对  $\forall \alpha \in V^*, \beta \in W^*$ , 定义  $\alpha$  与  $\beta$  的张量积 (tensor product) 为  $\alpha \otimes \beta$ :

$$\alpha \otimes \beta(v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w), \quad \forall v \in V, w \in W \quad (2.2.10)$$

所有这些形如  $\alpha \otimes \beta (\alpha \in V^*, \beta \in W^*)$  的元素所构成的向量空间, 称为  $V^*$  与  $W^*$  的张量积空间, 记为  $V^* \otimes W^*$ 。

**定理 2.2.1** 设  $V$  和  $W$  为两个向量空间, 则  $V^* \otimes W^* = L(V, W; R)$ 。

**证明:** 设  $\{e_i\}$  和  $\{\tilde{e}_j\}$  分别为向量空间  $V$  和  $W$  的基底,  $\{\omega^i\}$  和  $\{\tilde{\omega}^j\}$  分别为  $\{e_i\}$  和  $\{\tilde{e}_j\}$  的对偶基底。对  $\forall \alpha \otimes \beta \in V^* \otimes W^*$ , 有  $\alpha = \alpha_i \omega^i$  和  $\beta = \beta_j \tilde{\omega}^j$ , 所以有:

$$\alpha \otimes \beta = \alpha_i \beta_j \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j$$

又易证  $\omega^i \otimes \tilde{\omega}^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  是线性无关的。从而,  $\omega^i \otimes \tilde{\omega}^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  是  $V^* \otimes W^*$  的基, 故  $\dim(V^* \otimes W^*) = m \cdot n$ 。

另一方面,  $\forall f \in L(V, W; R), v \in V$ , 有:

$$\begin{aligned} \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j(v, w) &= \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j(v^k e_k, w^l \tilde{e}_l) = v^k w^l \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j(e_k, \tilde{e}_l) \\ &= v^k w^l \omega^i(e_k) \tilde{\omega}^j(\tilde{e}_l) = v^i w^j \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

由式 (2.2.11) 可知,

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f(v^i e_i, w^j \tilde{e}_j) = v^i w^j f(e_i, \tilde{e}_j) \\ &= f_{ij} v^i w^j = f_{ij} \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j(v, w) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

由此可知,

$$f = f_{ij} \omega^i \otimes \tilde{\omega}^j$$

所以,  $\omega^i \otimes \tilde{\omega}^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  也是  $L(V, W; R)$  的基底。

综上可知,  $V^* \otimes W^* = L(V, W; R)$ 。证毕。

为了考虑张量间的张量积, 先来定义多重线性函数间的张量积。

**定义 2.2.6 (多重线性函数间的张量积)** 设  $V_1, \dots, V_r$  和  $W_1, \dots, W_s$  为  $r+s$  个向量空间,  $\alpha \in L(V_1, \dots, V_r; R), \beta \in L(W_1, \dots, W_s; R)$ , 定义张量积为:

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta: V_1 \times \dots \times V_r \times W_1 \times \dots \times W_s &\rightarrow R \\ (v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) &\mapsto \alpha(v_1, \dots, v_r) \beta(w_1, \dots, w_s) \end{aligned}$$

因为  $\alpha \otimes \beta \in L(V_1, \dots, V_r, W_1, \dots, W_s; R)$ , 所以

$$\begin{aligned} & V_1^* \otimes \dots \otimes V_r^* \otimes W_1^* \otimes \dots \otimes W_s^* \\ &= \{\alpha \otimes \beta \mid \alpha \in L(V_1, \dots, V_r; R), \beta \in L(W_1, \dots, W_s; R)\} \end{aligned}$$

不难验证多重线性函数间的张量积满足如下性质。

**定理 2.2.2** 张量积满足如下运算规律:

(1) 分配律: 对  $\alpha_1, \alpha_2 \in L(V_1, \dots, V_r; R)$ ,  $\beta \in L(W_1, \dots, W_s; R)$ ,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta = \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta \quad (2.2.13)$$

(2) 结合律: 对  $\alpha \in L(V_1, \dots, V_r; R)$ ,  $\beta \in L(W_1, \dots, W_s; R)$ ,  $\gamma \in L(Z_1, \dots, Z_t; R)$ , 有:

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) \quad (2.2.14)$$

特别地, 可定义张量间的张量积。

**定义 2.2.7** (张量间的张量积) 设  $f \in L(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r_1 \uparrow}, \underbrace{V, \dots, V}_{s_1 \uparrow}; R)$ ,  $g \in L(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r_2 \uparrow}, \underbrace{V, \dots, V}_{s_2 \uparrow}; R)$ ,

定义

$$\begin{aligned} & f \otimes g(\alpha^1, \dots, \alpha^{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}, v_1, \dots, v_{s_1 + s_2}) \\ &= f(\alpha^1, \dots, \alpha^{\bar{r}_1}, v_1, \dots, v_{s_1})g(\alpha^{\bar{r}_1 + 1}, \dots, \alpha^{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}, v_{s_1 + 1}, \dots, v_{s_1 + s_2}) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

式中,  $\alpha^i \in V^* (1 \leq i \leq r_1 + r_2)$ ,  $v_j \in V (1 \leq j \leq s_1 + s_2)$ 。

在张量积的基础上, 可以确定张量空间的基底和维数。设  $\{e_i\}$  为  $V$  的基,  $\{\omega^j\}$  为  $\{e_i\}$  的对偶基,  $f \in V_s^r = L(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r \uparrow}, \underbrace{V, \dots, V}_{s \uparrow}; R)$ , 则对  $\forall \alpha^1, \dots, \alpha^r \in V^*$ ,  $v_1, \dots, v_s \in V$ , 有:

$$\begin{aligned} f(\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) &= f(\alpha_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}^r \omega^{i_r}, v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_s^{j_s} e_{j_s}) \\ &= f(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) \alpha_{i_1}^1 \dots \alpha_{i_r}^r v_1^{j_1} \dots v_s^{j_s} \\ &= f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \alpha_{i_1}^1 \dots \alpha_{i_r}^r v_1^{j_1} \dots v_s^{j_s} \\ &= f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s} (\alpha^1, \dots, \alpha^r, v_1, \dots, v_s) \end{aligned}$$

其中  $f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  为张量  $f$  在向量空间  $V$  的基底  $\{e_j\}$  和对偶空间  $V^*$  的基底  $\{\omega^i\}$  下的分量。所以, 有:

$$f = f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s} \quad (2.2.16)$$

$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s}$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m$  的线性无关性容易证明。

由此可知,

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq m\}$$

是  $(r, s)$  型张量空间  $V_s^r$  的一组基底。所以,  $(r, s)$  型张量空间  $V_s^r$  的维数:

$$\dim(V_s^r) = m^{r+s}$$

两个张量的张量积也可以用分量加以表示。设  $f \in V_s^r$ ,  $g \in V_q^p$  的分量分别为  $f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ ,  $g_{j_{s+1} \dots j_{s+q}}^{i_{r+1} \dots i_{r+p}}$ , 则  $(r+p, s+q)$  型张量  $f \otimes g$  的分量为:

$$(f \otimes g)_{j_1 \cdots j_{s+q}}^{i_1 \cdots i_{r+p}} = f_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} g_{j_{s+1} \cdots j_{s+q}}^{i_{r+1} \cdots i_{r+p}} \quad (2.2.17)$$

可用  $(r, s)$  型张量空间  $V_s^r$  生成直和空间:

$$T(V) = \bigoplus_{r,s \geq 0} V_s^r \quad (2.2.18)$$

该空间中元素可表示为张量的和。在  $T(V)$  的元素间引入加法、数乘、张量积运算后,  $T(V)$  成为一个代数, 我们称  $T(V)$  是向量空间  $V$  上的张量代数。注意到张量积运算,  $T(V)$  是一个分次代数。

### 2.2.3 张量的缩并运算

在定义 2.2.4 中, 我们是借助数的加法、减法和乘法来定义张量的相应运算。也可以借助分量来直接定义张量的加法、减法和数乘运算。例如, 将两个  $(r, s)$  型张量的分量相加来定义张量的加法。另外, 还可以考虑张量分量指标的变换。利用已知张量分量指标的变换可以生成新的张量。

**定义 2.2.8 (张量的缩并)** 设  $V$  是向量空间, 定义映射是  $C_\mu^\lambda: V_s^r \rightarrow V_{s-1}^{r-1}$ : 对  $(r, s)$  型张量

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s \in V_s^r$$

两个固定的指标  $1 \leq \lambda \leq r, 1 \leq \mu \leq s$ , 令

$$\begin{aligned} C_\mu^\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s) \\ = \langle v_\lambda, \alpha^\mu \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_\lambda \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \alpha^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}^\mu \otimes \cdots \otimes \alpha^s \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

式中, 符号 “ $\wedge$ ” 表示去掉该因子。再将  $C_\mu^\lambda$  的作用线性扩张到一般的  $(r, s)$  型张量上: 对

$$\xi = \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s},$$

令

$$\begin{aligned} C_\mu^\lambda(\xi) &= \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} C_\mu^\lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}) \\ &= \xi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \omega^{j_\mu}(e_{i_\lambda}) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{i_\lambda} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\omega}^{j_\mu} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s} \\ &= \xi_{j_1 \cdots j_{\mu-1} j_{\mu+1} \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_{\lambda-1} i_{\lambda+1} \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{i_\lambda} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\omega}^{j_\mu} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s} \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

称线性映射  $C_\mu^\lambda: V_s^r \rightarrow V_{s-1}^{r-1}$  是缩并 (contraction)。

**【例 2.2.2】** 对  $v \in V, \alpha \in V^*$ , 有:

$$\begin{aligned} C_1^1(v \otimes \alpha) &= C_1^1(v^i e_i \otimes \alpha_j \omega^j) = v^i \alpha_j C_1^1(e_i \otimes \omega^j) \\ &= v^i \alpha_j \omega^j(e_i) = v^i \alpha_j \delta_i^j = v^i \alpha_i \\ &= \alpha(v) \end{aligned}$$

**【例 2.2.3】** 设  $f: V \rightarrow V$  是向量空间  $V$  上的线性变换, 即  $f \in \text{Hom}(V)$ , 满足  $f(e_i) = b_i^j e_j$ , 其中  $\{e_i\}$  是向量空间  $V$  的一组基底。根据例 2.2.1 可知,  $f: V \rightarrow V$  等同于  $(1, 1)$  型张量  $\tilde{f}: V^* \times V \rightarrow R$ , 有:

$$\begin{aligned} C_1^1(\tilde{f}) &= \sum_{i=1}^n \tilde{f}(\omega^i, e_i) = \sum_{i=1}^n \omega^i(f(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega^i\left(\sum_{j=1}^n b_i^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n b_i^j \delta_j^i = \sum_{i=1}^n b_i^i \end{aligned}$$

称  $\text{trace}(f) = \sum_{i=1}^n b_i^i$  为  $f$  的迹。

## 2.2.4 度量张量、指标的提升和下降

**定义 2.2.9 (欧氏空间上的度量张量)** 设  $V$  是一个欧氏空间, 若映射  $g(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$  满足:

(1) 线性:  $\forall u_1, u_2, v \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in R,$

$$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 g(u_1, v) + \lambda_2 g(u_2, v) \quad (2.2.21)$$

(2) 对称性:  $\forall u, v \in V,$

$$g(u, v) = g(v, u) \quad (2.2.22)$$

(3) 正定性:

$$g(u, u) \geq 0 \quad (2.2.23)$$

其中等号成立当且仅当  $u = 0$ ; 则称映射  $g$  为欧氏空间  $V$  上的度量张量 (metric tensor)。

由定义 2.2.9 的 (1) 和 (2) 可知, 度量张量是双线性的。

因为  $g \in V^* \otimes V^*$ , 所以  $g = g_{ij} \omega^i \otimes \omega^j$ , 故

$$\begin{aligned} g(e_k, e_l) &= g_{ij} \omega^i \otimes \omega^j(e_k, e_l) = g_{ij} \omega^i(e_k) \otimes \omega^j(e_l) \\ &= g_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = g_{kl} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

由此可知

$$g = g_{ij} \omega^i \otimes \omega^j \quad (2.2.25)$$

式中,  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ 。

**定义 2.2.10 (度量张量  $g$  的共轭张量)** 用  $(g^{ij})$  表示欧氏空间  $V$  上的度量张量  $g$  的系数矩阵  $(g_{ij})$  的逆矩阵。易证  $g^{ij}$  遵守 2 阶反变张量的规律。称  $\tilde{g} = g^{ij} e_i \otimes e_j$  为度量张量  $g$  的共轭张量 (conjugate tensor)。

需要指出的是, 度量张量  $g$  是向量空间  $V$  上的一种内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 所以在向量空间  $V$  中引入了一个度量  $g$  后, 就相当于规定了一个内积。这样, 就获得了一个欧氏空间  $(V, g)$ 。在这个欧氏空间中, 可以定义一个同构  $\eta: V \rightarrow V^*$  为  $\eta(v)(u) = g(v, u), \forall u \in V$ 。其实质相当于: 借助度量张量  $g$ , 将向量空间  $V$  的元素与对偶空间  $V^*$  中的元素等同起来。

从分量的角度来考虑, 对  $\forall v = v^i e_i \in V, \eta(v) \in V^*$ , 有:

$$\begin{aligned} \eta(v) a_i \omega^i &= (\eta(v))(e_i) \omega^i = g(v, e_i) \omega^i \\ &= g(v^j e_j, e_i) \omega^i = g_{ij} v^j \omega^i \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

式中,  $(\eta(v))_j = g_{ij} v^j$  是将向量  $V$  的分量  $v^j$  的上指标通过  $g_{ij}$  降下来, 就得到  $V^*$  中元素分量的下指标。反之, 对  $f = f_i \omega^i \in V^*$ , 令

$$f^i = (\eta^{-1}(f))^i = g^{ij} f_j \quad (2.2.27)$$

因为  $v$  与  $\eta(v)$  是同构的, 所以  $v$  与  $\eta(v)$  可以看成同一个对象。

从中可以看到指标的提升与下降现象:  $v_i = g_{ij} v^j$  和  $v^i = g^{ij} v_j$ 。特别地, 若欧氏空间  $V$  的

基底  $\{e_i\}$  使得  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , 则  $v_i = g_{ij}v^j = v^i$  和  $e_i = g_{ij}e^j = e^i$ , 即上下指标、基底和对偶基底是一致的。所以, 在物理和力学中的直角坐标系下的张量是不区分上下指标的。

指标的提升与下降对所有张量都适用, 有:

$$f_{i_1 \cdots i_s}^{j_1 \cdots j_r} = g_{i_1 j_1} f_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \quad (2.2.28)$$

和

$$f_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} = g^{i_1 j_1} f_{j_1 j_2 \cdots j_s}^{i_1 i_2 \cdots i_r} \quad (2.2.29)$$

与本节相关的黎曼度量张量的讨论参见 5.2 节。

## 2.3 对称张量和反对称张量

本节先研究两类特殊的张量: 对称张量和反对称张量, 然后引入对称化算子和反对称化算子的定义。这是 2.4 节讨论外形式的基础。

### 2.3.1 对称与反对称张量

为了讨论对称和反对称张量, 首先做一些概念上的准备工作。

**定义 2.3.1 (排列、置换)** 称由自然数  $1, 2, \dots, n$  所组成的一个有序数组为一个  $n$  级排列 (arrangement)。例如,  $12 \cdots n$  和  $21 \cdots n$ 。将一个排列中的某两个数交换, 而其余的数不动, 从而得到另一个排列, 这样的变换称为对换 (transposition)。任意交换一个排列中数的位置, 从而得到另一个排列, 这样的变换称为置换 (permutation)。称  $q$  级排列的所有置换构成的集合关于置换的复合运算构成的群为置换群 (permutation group), 记为  $\phi(q)$ 。

不难发现, 置换可由有限次对换构成。根据构成置换的对换个数, 将置换分为偶置换和奇置换。由此, 有符号函数 (sign function):

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 为偶置换} \\ -1, & \sigma \text{ 为奇置换} \end{cases}$$

下面来讨论两类特殊的协变张量: 对称张量和反对称张量。将给出一系列等价的定义。

**定义 2.3.2 (对称、反对称张量)** 设  $f \in V_q^0$ , 若对  $\forall v_1, \dots, v_q \in V$ ,  $i \neq j$ ,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_q) = f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_q) \quad (2.3.1)$$

则称  $f$  为对称的 (symmetric)  $q$  阶协变张量。若对  $\forall v_1, \dots, v_q \in V$ ,  $i \neq j$ ,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_q) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_q) \quad (2.3.2)$$

则称  $f$  为反对称的 (anti-symmetric)  $q$  阶协变张量。

利用置换群, 可以给出对称和反对称张量的等价定义。

**定义 2.3.3 (对称、反对称张量)** 设  $f \in V_q^0$ , 若对  $\forall v_1, \dots, v_q \in V$ ,  $\sigma \in \phi(q)$ , 有:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = f(v_1, \dots, v_q) \quad (2.3.3)$$

则称  $f$  为对称的  $q$  阶协变张量。若对  $\forall v_1, \dots, v_q \in V$ ,  $\sigma \in \phi(q)$ , 有:

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = \text{sign}(\sigma) f(v_1, \dots, v_q) \quad (2.3.4)$$

则称  $f$  为反对称的  $q$  阶协变张量。

对  $q$  阶协变张量  $f$  和  $q$  级排列的置换  $\sigma$ , 可令

$$\sigma(f)(v_1, \dots, v_q) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) \quad (2.3.5)$$

这是合理的. 事实上, 任意一个  $q$  阶协变张量  $f$  可以表示为  $f = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^q$ , 其中  $\alpha^1, \dots, \alpha^q \in V^*$ . 所以, 有:

$$\sigma(f)(v_1, \dots, v_q) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \dots \alpha^q(v_{\sigma(q)}) \quad (2.3.6)$$

一个自然的问题是:  $\sigma(f)$  能否用协变张量  $f$  和置换表示出来? 此处用三级排列为例加以

讨论. 设  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $f = \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3$ , 则

$$\begin{aligned} \sigma(f)(v_1, v_2, v_3) &= \alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) \\ &= \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \alpha^2(v_{\sigma(2)}) \alpha^3(v_{\sigma(3)}) \\ &= \alpha^1(v_2) \alpha^2(v_3) \alpha^3(v_1) \\ &= \alpha^3(v_1) \alpha^1(v_2) \alpha^2(v_3) \\ &= \alpha^3 \otimes \alpha^1 \otimes \alpha^2(v_1, v_2, v_3) \\ &= \alpha^{\tau(1)} \otimes \alpha^{\tau(2)} \otimes \alpha^{\tau(3)}(v_1, v_2, v_3) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

式中, 置换  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  为置换  $\sigma$  的逆置换. 该结论对任一  $q$  阶协变张量都成立, 即可以证

明: 设  $f = \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^q$  为一个  $q$  阶协变张量,  $\sigma \in \varphi(q)$ , 则

$$\sigma(f) = \alpha^{\tau(1)} \otimes \dots \otimes \alpha^{\tau(q)} \quad (2.3.8)$$

式中,  $\tau = \sigma^{-1}$ .

利用这一表示方法, 可将对称和反对称张量的定义写得更为简洁.

**定义 2.3.4 (对称、反对称张量)** 设  $f \in V_q^0$ ,  $\sigma \in \varphi(q)$ , 若  $\sigma(f) = f$ , 则  $f$  为对称的  $q$  阶协变张量; 若  $\sigma(f) = \text{sign}(\sigma)f$ , 则  $f$  为反对称的  $q$  阶协变张量.

$f \in V_q^0$  的分量:  $f = f_{i_1 \dots i_q} \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_q}$ , 而  $\sigma(\omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_q}) = \omega^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{\sigma(q)}}$ , 所以  $\sigma(f)$  的分量表示为:

$$\sigma(f) = f_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} \omega^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{\sigma(q)}} \quad (2.3.9)$$

从指标的角度来看,  $f \in V_q^0$  是对称的  $\Leftrightarrow f$  的分量  $f_{i_1 \dots i_q}$  关于各指标是对称的, 即

$$f_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} = f_{i_1 \dots i_q} \quad (2.3.10)$$

$f \in V_q^0$  是反对称的  $\Leftrightarrow$

$$f_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}} = \text{sign}(\sigma) f_{i_1 \dots i_q} \quad (2.3.11)$$

**【例 2.3.1】** 设  $T = T_{ij} \omega^i \otimes \omega^j$  为一个 2 阶协变张量. 因为

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad (2.3.12)$$

根据定义 2.3.4 可知:  $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  是一个对称的 2 阶协变张量的分量,  $\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$  是一个反对称的 2 阶协变张量的分量, 所以任一个 (0,2) 型张量都可以表示为一个对称张量和一个反对称张量的和.

**【例 2.3.2】** 设一个密度为  $\rho$ 、质量连续分布的刚体以角速度点  $\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  绕其内部一点  $O$  旋转。用向径  $\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$  表示刚体上微元点  $dm = \rho d\tau$  关于点  $O$  的位置，则其关于点  $O$  的速度为  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ，其关于点  $O$  的动量矩为  $\vec{r} \times \vec{v} dm = \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) d\tau$ 。又因为

$$\begin{aligned}\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\vec{\omega} - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)\vec{r}\end{aligned}\quad (2.3.13)$$

所以该刚体关于点  $O$  的总动量矩  $\vec{L} = \int \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) d\tau$  可用如下矩阵等式加以表示：

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \rho(x_2^2 + x_3^2) d\tau & -\int \rho x_1 x_2 d\tau & -\int \rho x_1 x_3 d\tau \\ -\int \rho x_2 x_1 d\tau & \int \rho(x_3^2 + x_1^2) d\tau & -\int \rho x_2 x_3 d\tau \\ -\int \rho x_3 x_1 d\tau & -\int \rho x_3 x_2 d\tau & \int \rho(x_1^2 + x_2^2) d\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}\quad (2.3.14)$$

将右端系数矩阵记为  $I$ ，则其元素可以表示为：

$$I_{ij} = \int \rho(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) d\tau, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.3.15)$$

9 个量  $I_{ij}$  组成了一个二阶张量  $I$ ，称为转动惯量张量。显然它是一个对称张量。

**【例 2.3.3】** 电动力学中的电磁场张量：

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

是四维时空中的一个 2 阶反对称张量，它有 16 个分量。

## 2.3.2 对称化与反对称化算子

**定理 2.3.1** 设  $f \in V_q^0$ ，则

$$S_q(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \sigma(f) \quad (2.3.17)$$

是对称的  $q$  阶协变张量，

$$A_q(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma(f) \quad (2.3.18)$$

是反对称的  $q$  阶协变张量。

**证明：**  $\forall \tau \in \phi(q)$ ，有：

$$\begin{aligned}\tau(S_q(f)) &= \tau\left(\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \sigma(f)\right) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \tau(\sigma(f)) \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\tau \circ \sigma \in \phi(q)} (\tau \circ \sigma)(f) = S_q(f)\end{aligned}\quad (2.3.19)$$

所以， $S_q(f)$  是对称的  $q$  阶协变张量。

$$\begin{aligned}
\tau(A_q(f)) &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \varphi(q)} \text{sign}(\sigma) \cdot (\tau \circ \sigma)(f) \\
&= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \varphi(q)} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \text{sign}(\tau)(\tau \circ \sigma)(f) \\
&= \text{sign}(\tau) \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \varphi(q)} \text{sign}(\tau \circ \sigma)(\tau \circ \sigma)(f) \\
&= \text{sign}(\tau) \frac{1}{q!} \sum_{\tau \circ \sigma \in \varphi(q)} \text{sign}(\tau \circ \sigma)(\tau \circ \sigma)(f) \\
&= \text{sign}(\tau) A_q(f)
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

所以,  $A_q(f)$  是反对称的  $q$  阶协变张量。证毕。

定理 2.3.1 告诉我们: 不论原来的张量  $f$  有没有对称性, 都可以分别用算子  $S_q$  和  $A_q$  将张量  $f$  变为对称张量和反对称张量。据此, 引入对称化和反对称化算子的定义。

**定义 2.3.5 (对称化与反对称化算子)** 设  $f \in V_q^0$ , 算子  $S_q$  和  $A_q$  对张量  $f$  的作用结果为式 (2.3.17) 和式 (2.3.18), 称  $S_q$  和  $A_q$  为对称化算子 (symmetrization operator) 和反对称化算子 (anti-symmetrization operator)。

为了考虑后面引入的外形式, 着重讨论反对称化算子。

$$f \in V_q^0 \rightarrow A_q(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \varphi(q)} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma(f)$$

设  $1 \leq r < q$ ,  $\lambda \in \varphi(r)$ , 可将  $r$  级排列的置换理解为  $q$  级排列的一个特殊置换:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ \lambda(1) & \lambda(2) & \cdots & \lambda(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & q \\ \lambda(1) & \lambda(2) & \cdots & \lambda(r) & r+1 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

**定义 2.3.6 (部分反对称化算子)** 设  $f \in V_q^0$ ,  $1 \leq r < q$ , 若

$$a_r(f) = \frac{1}{r!} \sum_{\lambda \in \varphi(r)} \text{sign}(\lambda) \cdot \lambda(f) \tag{2.3.21}$$

则称  $a_r$  为对张量的前  $r$  个变量的部分反对称化算子。

下面将克罗内克符号 (Kronecker symbols)

$$\delta_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.3.22}$$

推广成广义克罗内克符号:

$$\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} = \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_r} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_r} \end{vmatrix} \tag{2.3.23}$$

根据行列式的性质可知, 广义克罗内克符号有如下性质:

(1)  $\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r}$  关于指标  $(i_1, \cdots, i_r)$  或  $(j_1, \cdots, j_r)$  是反对称的, 即

$$\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_r} = -\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_r} \tag{2.3.24}$$

(2) 若  $i_1 < \cdots < i_r$ ,  $j_1 < \cdots < j_r$ , 则



$$\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} = \delta_{j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_r}^{i_r} \quad (2.3.25)$$

(3)

$$\delta_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_q} = \begin{cases} 1, & i_1, \cdots, i_q \text{ 互不相同, 且 } j_1 \cdots j_q \text{ 为 } i_1 \cdots i_q \text{ 的偶置换} \\ -1, & i_1, \cdots, i_q \text{ 互不相同, 且 } j_1 \cdots j_q \text{ 为 } i_1 \cdots i_q \text{ 的奇置换} \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

利用广义克罗内克符号, 可以获得部分反对称化算子与整体反对称化算子合成效果的如下结论:

**定理 2.3.2** 对  $\forall f \in V_q^0$ , 有  $A_q(a_r(f)) = A_q(f)$ 。

**证明:** 对  $\sigma \in \phi(q)$ , 有  $\text{sign}(\sigma) = \delta_{1 \cdots q}^{\sigma(1) \cdots \sigma(q)}$ , 因此,

$$\begin{aligned} A_q(f)(v_1, \cdots, v_q) &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma(f)(v_1, \cdots, v_q) \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \phi(q)} \delta_{1 \cdots q}^{\sigma(1) \cdots \sigma(q)} \cdot f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(q)}) \\ &= \frac{1}{q!} \delta_{1 \cdots q}^{i_1 \cdots i_q} f(v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}) \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

同时, 注意到  $\delta_{1 \cdots q}^{j_1 \cdots j_r i_{r+1} \cdots i_q} = \frac{1}{r!} \delta_{1 \cdots q}^{i_1 \cdots i_q} \delta_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_r}$ , 有:

$$\begin{aligned} (A_q \circ a_r(f))(v_1, \cdots, v_q) &= \frac{1}{q!} \delta_{1 \cdots q}^{i_1 \cdots i_q} a_r(f)(v_{i_1}, \cdots, v_{i_q}) \\ &= \frac{1}{q!} \frac{1}{r!} \delta_{1 \cdots q}^{i_1 \cdots i_q} \delta_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_r} f(v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}, v_{i_{r+1}}, \cdots, v_{i_q}) \\ &= \frac{1}{q!} \delta_{1 \cdots q}^{j_1 \cdots j_r i_{r+1} \cdots i_q} f(v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}, v_{i_{r+1}}, \cdots, v_{i_q}) \\ &= A_r(f)(v_1, \cdots, v_q) \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

证毕。

## 2.4 外形式与外代数

外代数是积为外积的一种代数系统。它是由德国数学家格拉斯曼 (H. G. Grassmann, 1809—1877 年) 发明的, 所以外代数也被称为格拉斯曼代数 (Grassmann Algebra)。在 1844 年的著作《线性扩张论, 数学的一个新分支》(Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik) 中, 格拉斯曼大胆地融合了坐标、向量和复数等概念于  $n$  维向量空间, 定义了外积 (也称为组合积, 英文: combinatorial product, 德文: äußeres Produkt)。同时, 他给出了外代数的关键思想。外形式是具有反对称性的协变张量。张量可以进行减法、数乘和张量积等运算。本节先研究外形式间特有的运算——外积运算, 然后讨论外形式空间和外代数, 最后讨论外形式的相关性质, 如著名的嘉当引理。

### 2.4.1 外形式

**定义 2.4.1 (外形式)** 称向量空间  $V$  上的反对称的  $r$  阶协变张量是  $V$  上的  $r$  次外形式

(exterior form) 或  $r$ -形式 ( $r$ -form)。用  $\Lambda^r V^*$  表示向量空间  $V$  上的所有  $r$  次外形式所构成的集合, 称为  $r$  次外形式空间。

注意到  $\forall \alpha \in \Lambda^r V^*$ , 有  $\alpha \in V_r^0 = L(\underbrace{V, \dots, V}_{r \uparrow}; R)$ , 所以,  $\Lambda^r V^*$  是  $L(\underbrace{V, \dots, V}_{r \uparrow}; R)$  的子集。特别

地,  $\Lambda^1 V^* = V^* = L(V; R)$ 。

**【例 2.4.1】** 设  $V$  为  $n$  维向量空间, 映射  $D^{i_1 \dots i_r}: V \times \dots \times V \rightarrow R$ ,

$$D^{i_1 \dots i_r}(v_1, \dots, v_r) = \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_r^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_r} & \cdots & v_r^{i_r} \end{vmatrix}$$

式中,  $v_j = v_j^{i_i} e_{i_i} \in V$ 。

根据行列式的性质易知  $D^{i_1 \dots i_r}$  是  $r$  重线性的。同时, 任意交换两个向量  $v_j$  和  $v_k$  的位置, 相当于交换等式右端行列式的第  $j$  列与第  $k$  列, 此时行列式要变号。因此,  $D^{i_1 \dots i_r}$  是反对称的。综上可知,  $D^{i_1 \dots i_r} \in \Lambda^r V^*$ 。特别地, 有:

$$D^{i_1 \dots i_r}(\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_r}) = \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_r} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_r} \end{vmatrix} = \delta_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$$

## 2.4.2 外积

作为张量, 同次的外形式可以相加、相减。另外, 外形式间还可以进行外积运算。

**定义 2.4.2 (外积)** 设  $V$  为向量空间, 对  $\forall \alpha \in \Lambda^r V^*$ ,  $\beta \in \Lambda^s V^*$ , 定义  $\alpha$  与  $\beta$  的外积 (exterior product) 为:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} A_{r+s}(\alpha \otimes \beta) \quad (2.4.1)$$

外积也称为楔积 (wedge product)。

**定理 2.4.1 (外积的运算规律)** 外形式的外积具有如下运算规律:  $\forall \alpha \in \Lambda^r V^*$ ,  $\beta \in \Lambda^s V^*$ ,  $\gamma \in \Lambda^t V^*$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda^k V^*$ , 有:

(1) 分配律:

$$\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2 \quad (2.4.2)$$

(2) 结合律:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (2.4.3)$$

(3) 反交换律:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \quad (2.4.4)$$

证明 (3): 因为  $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{r+s} V^*$ , 所以对  $\forall \sigma \in \varphi(r+s)$ , 有:

$$\sigma(\alpha \wedge \beta) = \text{sign}(\sigma) \alpha \wedge \beta \quad (2.4.5)$$

特别地, 对  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ s+1 & \cdots & s+r & 1 & \cdots & s \end{pmatrix}$ , 式 (2.4.5) 也成立。利用外积的定义,

对  $\forall v_1, \dots, v_{r+s}$ , 有:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \text{sign}(\sigma) \sigma(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\
&= (-1)^{rs} \alpha \wedge \beta(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}, v_1, \dots, v_s) \\
&= (-1)^{rs} \frac{(r+s)!}{r!s!} (A_{r+s}(\alpha \otimes \beta))(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}, v_1, \dots, v_s) \\
&= (-1)^{rs} \frac{(r+s)!}{r!s!} \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\tau \in \phi(r+s)} \text{sign}(\tau) \tau(\alpha \otimes \beta)(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}, v_1, \dots, v_s) \\
&= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \phi(r+s)} \text{sign}(\tau) \alpha \otimes \beta(v_{\tau(s+1)}, \dots, v_{\tau(s+r)}, v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(s)}) \quad (2.4.6) \\
&= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \phi(r+s)} \text{sign}(\tau) \beta(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(s)}) \alpha(v_{\tau(s+1)}, \dots, v_{\tau(s+r)}) \\
&= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \phi(r+s)} \text{sign}(\tau) \tau(\beta \otimes \alpha)(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_{s+r}) \\
&= (-1)^{rs} \frac{(r+s)!}{r!s!} (A_{r+s}(\beta \otimes \alpha))(v_1, \dots, v_{s+r}) \\
&= (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha(v_1, \dots, v_{s+r})
\end{aligned}$$

由  $v_1, \dots, v_{r+s}$  的任意性可知,  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ 。证毕。

考虑外形式次数的奇偶性:  $\forall \alpha \in \Lambda^r V^*, \beta \in \Lambda^s V^*$ , 有:

$$\alpha \wedge \beta = \begin{cases} \beta \wedge \alpha, & \text{当 } r, s \text{ 为偶数时} \\ -\beta \wedge \alpha, & \text{当 } r, s \text{ 为奇数时} \end{cases} \quad (2.4.7)$$

特别地, 若  $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^*$ , 则

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha \quad (2.4.8)$$

由此可知, 对  $\forall \alpha \in \Lambda^r V^*$ , 总有:

$$\alpha \wedge \alpha = 0 \quad (2.4.9)$$

可利用广义克罗内克函数和张量积表示外形式间的外积。事实上, 设  $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in \Lambda^1 V^*$ , 则

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 = 2! A_2(\alpha^1 \otimes \alpha^2) \quad (2.4.10)$$

进而, 可推得:

$$\begin{aligned}
\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 &= (\alpha^1 \wedge \alpha^2) \wedge \alpha^3 = \frac{(2+1)!}{2!!} A_3((\alpha^1 \wedge \alpha^2) \otimes \alpha^3) \\
&= \frac{3!}{2!} A_3(2! A_2(\alpha^1 \otimes \alpha^2) \otimes \alpha^3) \\
&= 3! A_3(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \alpha^3)
\end{aligned} \quad (2.4.11)$$

由此递推可得:

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^r = r! A_r(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^r) = \delta_{i_1 \dots i_r}^{1 \dots r} \alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{i_r} \quad (2.4.12)$$

**【例 2.4.2】** 设  $x, y, z \in V^*$ , 计算化简  $(6x + y - 7z) \wedge (2x + 3y)$ 。

**解:** 利用外积运算的分配律和反交换律, 有:

$$\begin{aligned}
&(6x + y - 7z) \wedge (2x + 3y) \\
&= 12x \wedge x + 18x \wedge y + 2y \wedge x + 3y \wedge y - 14z \wedge x - 21z \wedge y \\
&= 16x \wedge y - 14z \wedge x + 21y \wedge z
\end{aligned}$$

### 2.4.3 外形式空间和外代数

下面先来考虑外形式空间  $\Lambda^r V^*$  的基底和维数。

**定理 2.4.2 (外形式空间的基底和维数)** 设  $\{e_i\}_{i=1}^n$  为向量空间  $V$  的一组基,  $\{\omega^i\}_{i=1}^n$  为  $\{e_i\}_{i=1}^n$  的对偶基, 则  $\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$  是  $r$  次外形式空间  $\Lambda^r V^*$  的一组基。从而,  $\dim(\Lambda^r V^*) = C_n^r$ 。

**证明:**  $\forall \xi \in \Lambda^r V^*$ , 有:

$$\xi = \xi_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_r}$$

式中,  $\xi_{i_1 \cdots i_r} = \xi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r})$ 。因为  $r$  次外形式  $\xi$  是反对称的协变张量, 所以用反对称化算子  $A_r$  作用于  $\xi$  后所得的仍是  $\xi$ 。

$$\begin{aligned} \xi &= A_r(\xi) = \xi_{i_1 \cdots i_r} A_r(\omega^{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{i_r}) \\ &= \frac{1}{r!} \xi_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \xi_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

即  $r$  次外形式  $\xi$  可由  $C_n^r = \binom{n}{r}$  个元素:  $\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \ (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$  线性表出。

下面说明  $\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$  是线性无关的。首先注意到: 对  $\forall v_1, \cdots, v_r \in V$ , 有:

$$\begin{aligned} \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r(v_1, \cdots, v_r) &= \delta_{i_1 \cdots i_r}^{1 \cdots r} \alpha^{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_r}(v_1, \cdots, v_r) \\ &= \delta_{i_1 \cdots i_r}^{1 \cdots r} \langle \alpha^{i_1}, v_1 \rangle \cdots \langle \alpha^{i_r}, v_r \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \alpha^1, v_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha^1, v_r \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha^r, v_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha^r, v_r \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

一般地, 有:

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_r}(v_1, \cdots, v_r) = \begin{vmatrix} \langle \alpha^{i_1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha^{i_1}, v_r \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha^{i_r}, v_1 \rangle & \cdots & \langle \alpha^{i_r}, v_r \rangle \end{vmatrix} \quad (2.4.14)$$

特别地, 有:

$$\begin{aligned} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_r}) &= \begin{vmatrix} \langle \omega^{i_1}, e_{j_1} \rangle & \cdots & \langle \omega^{i_1}, e_{j_r} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega^{i_r}, e_{j_1} \rangle & \cdots & \langle \omega^{i_r}, e_{j_r} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_r} & \cdots & \delta_{j_r}^{i_r} \end{vmatrix} = \delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} \end{aligned}$$

由此可知, 将  $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \xi_{i_1 \cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} = 0$  的两边作用于  $(e_{j_1}, \cdots, e_{j_r})$ , 有  $\xi_{j_1 \cdots j_r} = 0$ 。

综上可知,  $\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$  为  $\Lambda^r V^*$  的一组基。证毕。

**定义 2.4.3 (外代数)** 由外积运算的反对称性可知,  $n$  维向量空间  $V$  的外形式的最高次数是  $n$ 。这样, 将向量空间  $V$  上的所有外形式构成的直和空间记为  $\Lambda V^*$ , 即  $\Lambda V^* = \bigoplus_{r=0}^n \Lambda^r V^*$ 。

在  $\Lambda V^*$  中, 可以进行加法、数乘、外积运算, 称为外代数 (exterior algebra)。

类似于张量代数, 外代数  $\Lambda V^*$  是一个分次代数, 其基底为:

$$\begin{aligned} & 1; \\ & \omega^i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ & \omega^i \wedge \omega^j, \quad 1 \leq i < j \leq n; \\ & \vdots \\ & \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n. \end{aligned}$$

格拉斯曼发明的外代数是革命性的、超前的, 所以外代数的价值和重要性在其 1844 年著作出版很长一段时间内都没有被当时的数学界所完全认识, 包括莫比乌斯 (A. F. Möbius, 1790—1868 年)、库默尔 (E. Kummer, 1810—1893 年) 等大数学家。为了让更多的人理解他的工作, 格拉斯曼曾将其 1844 年的著作进行了彻底重写, 并于 1862 年出版了《扩张理论, 彻底、严格处理》(Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form begründet)。但直到 19 世纪 70 年代, 格拉斯曼的工作才被人们所重视并得到应用。1878 年, 英国数学家克利福德 (W. K. Clifford, 1845—1879 年) 将格拉斯曼的外代数加入到爱尔兰数学家哈密顿 (W. R. Hamilton, 1805—1865 年) 发明的四元数中, 推广了四元数的概念。后来, 法国数学家嘉当 (J. Cartan, 1869—1951 年) 发展了向量空间上的外形式和流形的外微分式理论, 将外代数应用于微分几何研究。这样, 外代数也就获得更为广泛的应用。

## 2.4.4 外形式的性质

下面将利用对偶向量的线性无关性、线性相关性和外积的反对称性等性质, 获得关于外形式和外积的若干性质, 包括著名的嘉当引理。先来证明定理 2.4.3, 该定理将在后续的讨论中发挥重要作用。

**定理 2.4.3** 设  $V$  是一个  $m$  维向量空间,  $m \geq r$ ,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in V^*$ , 则  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  是线性相关的  $\Leftrightarrow \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r = 0$ 。

**证明:** “ $\Rightarrow$ ” 若  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  线性相关, 则必有一个对偶向量可被其他对偶向量线性表出,

不妨设  $\alpha^1 = \sum_{k=2}^r a_k \alpha^k$ , 则由此可得:

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^r = \sum_{k=2}^r a_k \alpha^k \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^r = 0 \quad (2.4.15)$$

“ $\Leftarrow$ ” 反之, 若  $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r = 0$ , 假设  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  是线性无关的, 则可将  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  扩充成  $V^*$  的基底。设  $e_1, \dots, e_r$  是向量空间  $V$  中与  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  对偶的那部分基底, 则

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r (e_1, \dots, e_r) = 1$$

由此可知,  $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \neq 0$ , 矛盾! 所以,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  必是线性无关的。证毕。

**定义 2.4.4 (外形式整除)** 设  $V$  为向量空间,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in \Lambda^1 V^*$ ,  $\Omega \in \Lambda^p V^*$ , 若存在  $\phi_1, \dots, \phi_r \in \Lambda^{p-1} V^*$ , 使得:

$$\Omega = \alpha^1 \wedge \phi_1 + \cdots + \alpha^r \wedge \phi_r$$

则称  $\Omega$  可被  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  整除, 记为  $\Omega \equiv 0 \pmod{(\alpha^1, \dots, \alpha^r)}$ 。

**定理 2.4.4** 设  $V^*$  是  $n$  维向量空间  $V$  的对偶空间,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in V^*$ , 并且  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  是线性无关的,  $\Omega \in \Lambda^p V^*$ , 则  $\Omega \equiv 0 \pmod{(\alpha^1, \dots, \alpha^r)} \Leftrightarrow \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \wedge \Omega = 0$ 。

**证明:** “ $\Rightarrow$ ” 因为  $\Omega = \alpha^1 \wedge \phi_1 + \cdots + \alpha^r \wedge \phi_r$ , 所以  $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \wedge \Omega = 0$ 。

“ $\Leftarrow$ ” 因为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  线性无关, 所以可将其扩充为  $V^*$  的基底:  $\{\alpha^1, \dots, \alpha^r, \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^n\}$ , 所以,

$$\Omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \Omega_{i_1 \cdots i_p} \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p}$$

当  $r+p > n$  时, 有  $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \wedge \Omega = 0$ 。即  $p > n-r$ ,  $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p}$  要从基底中取  $p$  个元素, 而  $\{\alpha^{r+1}, \dots, \alpha^n\}$  中只有  $n-r$  个元素。所以, 此时构成  $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p}$  的一次外形式中至少有一个因子要在  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  中取得。因此, 有  $\Omega \equiv 0 \pmod{(\alpha^1, \dots, \alpha^r)}$ 。

当  $r+p \leq n$  时, 可将  $\Omega$  表示为:

$$\Omega = \alpha^1 \wedge \phi_1 + \cdots + \alpha^r \wedge \phi_r + \sum_{r+1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \Omega_{i_1 \cdots i_p} \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p} \quad (2.4.16)$$

将式 (2.4.16) 代入  $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \wedge \Omega = 0$ , 有:

$$\sum_{r+1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \Omega_{i_1 \cdots i_p} \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r \wedge \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_p} = 0 \quad (2.4.17)$$

所以,  $\Omega_{i_1 \cdots i_p} = 0$ ,  $r+1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ 。从而有  $\Omega = \alpha^1 \wedge \phi_1 + \cdots + \alpha^r \wedge \phi_r$ , 即  $\Omega \equiv 0 \pmod{(\alpha^1, \dots, \alpha^r)}$ 。证毕。

**定理 2.4.5 (嘉当引理)** 设  $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r \in V^*$ , 并且  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  线性无关,  $\sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k = 0$ , 则

$$\beta^k = \sum_{l=1}^r a_l^k \alpha^l \quad (2.4.18)$$

式中,  $a_l^k = a_l^k$ 。

**证明:** 因为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  是线性无关的, 所以可以将  $\alpha^1, \dots, \alpha^r$  扩充成  $V^*$  的基底:  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \alpha^{r+1}, \dots, \alpha^n$ 。这样,  $\beta^k$  可以用这组基底表示为:  $\beta^k = \sum_{A=1}^n a_A^k \alpha^A$ 。将其代入  $\sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k = 0$ , 有:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r a_l^k \alpha^k \wedge \alpha^l + \sum_{k=1}^r \sum_{i=r+1}^n a_i^k \alpha^k \wedge \alpha^i = 0 \quad (2.4.19)$$

整理可得:

$$\sum_{1 \leq k < l \leq r} (a_l^k - a_k^l) \alpha^k \wedge \alpha^l + \sum_{k=1}^r \sum_{i=r+1}^n a_i^k \alpha^k \wedge \alpha^i = 0 \quad (2.4.20)$$

而  $\{\alpha^i \wedge \alpha^j | 1 \leq i < j \leq n\}$  为  $\Lambda^2 V^*$  的基底, 由线性无关性可知:

$$\begin{cases} a_l^k = a_k^l, & 1 \leq k < l \leq r \\ a_i^k = 0, & 1 \leq k \leq r, r+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2.4.21)$$

由此可知式 (2.4.18) 成立。证毕。

**定理 2.4.6** 设  $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间,  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r, \tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^r, \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^r \in V^*$ , 若  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r$  是线性无关的, 并且

$$\sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k = \sum_{k=1}^r \tilde{\alpha}^k \wedge \tilde{\beta}^k \quad (2.4.22)$$

则  $\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^r, \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^r$  也是线性无关的, 而且  $\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^r, \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^r$  都可以表示为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r$  的线性组合。

**证明:** 将  $\sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k$  自乘  $s$  次, 利用外积的反对称性可知:

$$\overbrace{\left( \sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{k=1}^r \alpha^k \wedge \beta^k \right)}^{s \uparrow} = s! \alpha^1 \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \alpha^r \wedge \beta^r \quad (2.4.23)$$

再将  $\sum_{k=1}^r \tilde{\alpha}^k \wedge \tilde{\beta}^k$  自乘  $s$  次, 并利用式 (2.4.22) 可得:

$$s! \alpha^1 \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \alpha^r \wedge \beta^r = s! \tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\beta}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^r \wedge \tilde{\beta}^r \quad (2.4.24)$$

因为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r$  是线性无关的, 所以根据定理 2.4.3 可知式 (2.4.24) 左边不等于零。这样,  $\tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\beta}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^r \wedge \tilde{\beta}^r \neq 0$ , 故  $\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^r, \tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^r$  也是线性无关的。

利用式 (2.4.24), 对  $1 \leq k \leq r$ , 有:

$$\tilde{\alpha}^k \wedge \alpha^1 \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \alpha^r \wedge \beta^r = \tilde{\alpha}^k \wedge \tilde{\alpha}^1 \wedge \tilde{\beta}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{\alpha}^r \wedge \tilde{\beta}^r = 0。$$

所以, 根据定理 2.4.3 可知  $\tilde{\alpha}^k, \alpha^1, \beta^1, \dots, \alpha^r, \beta^r$  是线性相关的。故  $\tilde{\alpha}^k$  可以表示为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r$  的线性组合。类似可证明  $\tilde{\alpha}^k$  可以表示为  $\alpha^1, \dots, \alpha^r, \beta^1, \dots, \beta^r$  的线性组合。证毕。

## 附录 2.4 嘉当生平及学术贡献

埃利·嘉当 (Élie J. Cartan, 1869—1951 年), 法国著名数学家、几何学家。他的研究涉及微分几何、群论和数学物理多个领域, 他的工作为李群理论、李群在几何中的应用奠定了基础。



图 2.2.1 嘉当

1888 年, 嘉当成为巴黎高等师范学校的一名学生, 并在 1894 年取得博士学位。在此之

后，他在蒙皮立、里昂和南锡等地任教。1909年，他来到巴黎任教，并于1912年成为教授，直到1942年退休。1951年，他在巴黎逝世。

根据他自己的研究工作简介，嘉当的工作分成15个方面，包括：李群理论、微分几何、活动标架法、黎曼几何、偏微分方程系统、对称空间、相对论、旋量、超复数、无穷维群等。

嘉当发明了外微分形式的积分和相关的微分不变量。他定义了反对称的外形式，可以和毛瑞尔-嘉当微分方程（Maurer-Cartan differential equation）一起简化李群的分类。这导致他可以有效地确定解析偏微分方程组的局部可积条件。嘉当给出了活动标架的一般概念和方法。利用在他控制下的李群和微分形式等工具，基于活动标架的精巧计算方法，嘉当获得了一系列的研究结果：他第一次将主标架丛作为几何的基本研究对象，进而推广了德国数学家克莱因（F. Klein, 1849—1925年）的爱尔兰根纲领（Erlangen program）。微分的迭代是零算子，嘉当推开了20世纪数学研究的一个中心分支——代数拓扑的大门。嘉当第一个证明了真空时空度量的爱因斯坦方程有一大类解，说明了广义相对论是一个强大的物理理论（这被嘉当和爱因斯坦间的众多私人通信所证实）。当物体具有自旋性质时，广义相对论必须要扩充成爱因斯坦-嘉当理论（Einstein-Cartan theory），以正确处理自旋角动量。

嘉当的方法和思路是：利用微分形式在主标架场的全空间上具体定义一个对象，然后利用微分形式的积分计算不变量之间的关系，最后给出定理。其中涉及的具体计算往往非常简洁和有效。理解嘉当的这一系列“非几何”的处理方法是需要一定的洞察力的。因为相应的标架丛可以看成是高维仿射空间的子集，他的方法可以巧妙地避免涉及许多与抽象流形定义有关的技术问题，而这些问题在20世纪初恰恰还没有被完全搞清楚。在嘉当去世以后，嘉当积分被陈省身（S. S. Chern, 1911—2004年）、美国数学家科比（R. Bryant, 1953年—）、加德纳（R. Gardner）和格里菲思（P. Griffiths, 1938年—）等人所创新发现和振兴。

嘉当对在他之前150年间的多复变理论发展成果进行了继承和创新。同时，嘉当在李群理论方面做出了重要贡献。他对复单李代数的基础材料进行了重新研究，澄清了德国数学家恩格尔（F. Engel, 1861—1941年）和基灵（W. Killing, 1847—1923年）的工作。基灵在1888—1890年间将复单李代数进行了分类。而嘉当的博士论文在本质上对基灵的文章进行了严格化重新解读和发展。嘉当还引入了代数群的概念及表示论的许多基础概念。

他的儿子昂立·嘉当也是法国著名的数学家，在复变函数论、代数拓扑学、同调代数等方面颇有建树，曾当选法国科学院院士、美国科学院外籍院士，担任过国际数学联盟主席，1980年荣获数学界的重要奖项——沃尔夫奖（Wolf Prize）。

著名的华裔数学家陈省身先生是嘉当的学生。1934年，陈省身先生获清华大学资助，赴德国汉堡大学学习，师从著名几何学家布拉施克（W. J. E. Blaschke, 1885—1962年），1936年2月获得博士学位；之后，又利用剩余奖学金来到法国跟随嘉当研究微分几何学。在此期间，陈省身潜心研究嘉当的工作。嘉当安排陈省身每两星期去他家里一次，听取陈省身汇报其学习研究成果，每次一小时。短暂的一年相处，嘉当和陈省身结下了深厚的友谊。二战期间，嘉当的一个儿子因参加了法国抵抗德国占领的地下运动，被德国人所枪杀。二战结束后，法国物资缺乏，嘉当的生活也颇为拮据。当时已在美国普林斯顿访问的陈省身给嘉当多次寄去食品包裹。嘉当在给陈省身的感谢回信中有这样一段话：“几天前收到了你的邮包，这使我非常感动。我和我的全家都要谢谢你。感谢你关心我们的食品需求，很遗憾我们眼下仍不得不为此操心。尤其是我那六个分别住在巴黎和普瓦蒂埃的孙儿们，他们将津津有味地享用由祖父的最好学生从美国送来的美味的可可。那些大一些的孩子将会饶有兴趣地得知这位年轻



的数学家出生于中国，这对他们将是一堂生动的世界地理课。”其中流露的情谊耐人寻味，这无疑是数学界的一段佳话。

## 习 题 2

1. 求张量  $e_1 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 + e_2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2$  在基底:

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

下的坐标  $\tilde{T}_{21}^1$ 。

2. 设 (2,3) 型张量  $T$  在基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  下的所有坐标都是 1, 求该张量在基底:

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的坐标。

3. 设  $V$  是一个  $m$  维向量空间,  $\{e_i\}_{i=1}^m$  是  $V$  的一组基底,  $\{\omega^j\}_{j=1}^m$  是对偶基底, 证明:  $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}$ ,  $1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq m$  是线性无关的。

4. 设  $x, y, z \in V^*$ , 计算化简  $(2x - 3y + 5z) \wedge (3x + y - 4z)$ 。

5. 设  $\omega_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} dx^j$ ,  $i=1, 2, 3$ , 证明:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

6. 设  $V$  是一个向量空间, 证明: 若向量  $v_1, \cdots, v_r \in V$  是线性相关的, 则对  $\forall \xi \in \Lambda^r V^*$ , 有:

$$\xi(v_1, \cdots, v_r) = 0$$

7. 设  $V$  是一个向量空间, 对  $u \in V$ , 定义映射  $i(u): \Lambda^r V^* \rightarrow \Lambda^{r-1} V^*$  为: 对  $\forall \xi \in \Lambda^r V^*$ ,  $v_1, \cdots, v_{r-1} \in \Lambda^r V^*$ ,

$$(i(u)\xi)(v_1, \cdots, v_{r-1}) = \xi(u, v_1, \cdots, v_{r-1})$$

证明: (1)  $i(u): \Lambda^r V^* \rightarrow \Lambda^{r-1} V^*$  是线性映射;

(2) 对  $\eta \in \Lambda^{r-1} V^*$ , 有  $i(u)(\xi \wedge \eta) = (i(u)\xi) \wedge \eta + (-1)^r \xi \wedge (i(u)\eta)$ 。

## 微分流形

天地有正气，杂然赋流形。

——（南宋）文天祥

“流形”一词最早来源于德文中的 *Mannigfaltigkei*，出现于德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann, 1826—1866 年）在 1854 年所作的就职演说——《论作为几何学基础的假设》。英文中，这个词被翻译为 *manifold*（或 *manifoldness*），其意思多层、各种形体。中文翻译“流形”一词最早是由江哲涵先生（1902—1994 年）给出的。这个词出自南宋民族英雄、爱国诗人文天祥（1236—1283 年）所作的《正气歌》中的一句诗：“天地有正气，杂然赋流形”，其大意是：天地间有一股正气，纷杂地散步在各种形体上。江哲涵先生将其作为中文翻译是恰如其分的，而且寓意深刻。

套用这句诗，我们可以用“天地有真理，杂然赋流形”来形象地概括流形一词的数学含义——自然界有很多的数学真理，它们纷杂地赋予在不同的流形上；而流形上有着各种附加结构，有待人们借助于这些附加结构去发现和揭示出这些真理。

回顾历史，几何学的发展过程可以说是人们对几何空间、几何对象认识不断拓广的过程，而流形正是这一过程的产物。在欧氏几何阶段，人们所研究的几何对象主要是平面上的线段、多边形等规则的几何图形。17 世纪，笛卡儿创立的解析几何拓广了几何学的研究对象。18 世纪初，在牛顿和莱布尼兹创立了微积分后，几何学也随之进入古典微分几何阶段，人们将微积分应用于曲线、曲面研究。随着数学的进一步发展，这些几何对象已经不能满足几何、其他数学分支理论发展和人们研究自然的需要。人们迫切希望找到一个具有足够一般性、抽象性并可用来描述更多自然现象的几何空间。在这样的形势下，流形的概念应运而生。

时势造英雄，流形概念的最终形成主要归功于黎曼、法国数学家庞加莱（J. H. Poincare, 1854—1912 年）、德国数学家希尔伯特（D. Hilbert, 1862—1943 年）、德国数学家外尔（H. Weyl, 1885—1955 年）、美国数学家惠特尼（H. Whitney, 1907—1989 年）等几位数学家。在 1854 年所作的那篇著名的就职演说中，黎曼将高斯的工作推广到高维，发展了几何空间的概念。他认为曲线、曲面不是欧氏空间的附属物，而是和欧氏空间具有同等地位的独立几何空间。黎曼认为几何学研究的对象应是一种多重广义量，空间中的点可用  $n$  个实数  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  作为坐标来描述，这给出了流形概念的雏形。现代数学理论，特别是拓扑理论的发展，为人们逐步完善流形的定义提供了可能。1895 年，庞加莱在他发表的论文《拓扑》（*Analysis Situs*）中给出了流形的定义。在论文中，庞加莱将流形定义为欧氏空间之间的满足隐函数定理非退化条件的连续可微函数的水平集（level set）。该定义是流形现代概念的先导。同时，他也提出了流形链（chain of manifold）的概念，这是现在流形坐标卡集（charts）的雏形。1902 年，

希尔伯特在《几何基础》中第一次给出了流形的正确描述。在 1911—1912 年开设的黎曼面 (Riemann surfaces) 讨论班课程中, 外尔给出了微分流形的内蕴定义。在 1913 年的著作《黎曼面的概念》(Idee der Riemannfläche) 中, 外尔给出了微分流形的清晰描述。该书在 1955 年被翻译成英文版 *The Concept of a Riemann Surface*, 由 Addison-Wesley 出版社出版。20 世纪 30 年代, 惠特尼和其他数学家一起澄清了微分流形定义中的相关问题。惠特尼的嵌入定理 (Whitney embedding theorem) 表明利用坐标卡集给出的内蕴定义等价于庞加莱利用欧氏空间子集给出的定义。

追随这些数学大师照亮的道路, 后人对流形这一现代数学中的重要研究对象给予了广泛研究, 获得了丰富的研究结果, 推动了现代数学和相关学科的发展。目前, 微分流形已成为现代数学中的核心概念, 是开展非线性分析的重要舞台。

### 3.1 拓扑学基本概念

在现代数学中, 我们可以赋予集合以代数结构 (满足一定条件的若干种运算), 使其成为群、环、域, 进而研究它们的代数性质。类似地, 为了在集合上考虑连续性, 我们可以赋予集合以拓扑结构, 使其成为拓扑空间, 进而研究拓扑空间在同胚 (特殊的连续映射) 这一拓扑变换下的不变量和不变性质。这就是拓扑学。粗略地说, 拓扑学就是研究连续问题和现象的数学分支。人们也把拓扑学形象地称为橡皮几何学。事实上, 我们知道, 橡皮膜可做拉伸、压缩和弯曲等变形, 如果在变形过程中既不增加也不减少膜上的点, 并且不使原来不同的点重叠为一点, 也不使橡皮膜破裂, 那么这种变形的数学抽象就是拓扑变换。

拓扑学的英文名称为 “Topology”, 直译为地志学、地貌学。中文名称 “拓扑” 来源于希腊语 “Τοπολογία” 的音译。拓扑学起源于 19 世纪中期数学分析中产生的一些几何问题的研究。欧拉、高斯、黎曼、莫比乌斯、贝蒂 (E. Betti, 1823—1892 年) 等人奠定了拓扑学的发展基础, 他们的工作包括欧拉示性数、连通性、亏格、不可定向曲面等。庞加莱 (H. Poincare, 1854—1912 年) 在 19 世纪末、20 世纪初发表的多篇论文是拓扑学作为一个独立数学分支的标志。在此之后, 德国数学家康托尔 (G. Cantor, 1845—1918 年)、豪斯多夫 (F. Hausdorff, 1868—1942 年) 等人都为拓扑学的严密化、公理化做出了贡献, 推动了拓扑学的发展。华人数学家陈省身先生、吴文俊先生 (1919 年—) 等在拓扑学的示性类理论研究方面获得了重要成果。

经过百年的发展, 拓扑学已经发展成为包括点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑等在内的完善数学分支。与拓扑学有关的一些公开问题 (如庞加莱猜想等) 推动了微分几何、微分方程等多个数学分支的发展。拓扑学的研究成果也被广泛应用于物理学、生物学、经济学等多个学科。在分子生物学中, 研究脱氧核糖核酸的超螺旋结构所使用的工具就是拓扑学。

本节将介绍建立流形概念相关的一些拓扑学基本概念。

#### 3.1.1 拓扑空间

**定义 3.1.1 (拓扑空间)** 设  $X$  为非空集合,  $\tau$  为  $X$  的子集簇, 称  $\tau$  为  $X$  上的一个拓扑, 若  $\tau$  满足:

- (1)  $X, \emptyset \in \tau$ ;
- (2) 若  $A, B \in \tau$ , 则  $A \cap B \in \tau$ ;

(3) 若  $\tau_0 \subset \tau$ , 则  $\bigcup_{A \in \tau_0} A \in \tau$ ;

称  $(X, \tau)$  为拓扑空间 (topological space),  $\tau$  中的元素称为  $(X, \tau)$  的开集, 拓扑空间  $(X, \tau)$  简称为空间  $X$ 。也称 (1)、(2) 和 (3) 为开集公理。

对同一个集合  $X$ , 我们可以构造不同的拓扑,  $X$  与这些不同的拓扑构成不同的拓扑空间。

**定义 3.1.2 (平庸拓扑空间和离散拓扑空间)** 对一个非空集合  $X$ , 其上有两个特殊的拓扑, 平庸拓扑  $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$ , 离散拓扑  $\tau_1 = 2^X$ , 分别称  $(X, \tau_0)$  和  $(X, \tau_1)$  为平庸拓扑空间和离散拓扑空间。在平庸拓扑空间中, 有且仅有两个开集:  $\emptyset$  和  $X$ 。而在离散拓扑空间中,  $X$  的每个子集都是开集。

给定集合  $X$ , 称由  $X$  的一切子集构成的集簇为  $X$  的幂集 (power set), 记为  $2^X$ 。

**【例 3.1.1】** 设  $X = \{0, 1\}$ , 写出  $X$  上的所有拓扑和  $X$  的幂集。

**解:** 令  $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ ,  $\tau_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ 。验证可知,  $\tau_i (i = 0, 1, 2, 3)$  都是  $X$  上的拓扑, 而且它们是  $X$  上仅有的 4 种拓扑。 $X$  的幂集为  $2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ 。

**【例 3.1.2】** 设  $X = \{0, 1, 2\}$ , 给出  $X$  的一个拓扑。

**解:** 令  $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, X\}$ , 验证可知:  $\tau$  为  $X$  的一个拓扑。

度量空间可以转化为拓扑空间。事实上, 设  $(X, d)$  为度量空间,  $\tau_d$  表示  $(X, d)$  的所有开集构成的集簇。验证可知,  $\tau_d$  为  $X$  上的拓扑。称  $\tau_d$  为度量空间  $(X, d)$  的由度量  $d$  诱导出来的拓扑。因此, 度量空间  $(X, d)$  是拓扑空间  $(X, \tau_d)$ 。特别地, 度量空间  $R^n$ 、Hilbert 空间  $R^\infty$  都是拓扑空间。

但不是所有的拓扑空间都能转化为度量空间。

**定义 3.1.3 (可度量化的拓扑空间)** 设  $(X, \tau)$  为拓扑空间, 若存在  $X$  上的度量  $d$ , 使得  $\tau_d = \tau$ , 则  $(X, \tau)$  称为可度量化的拓扑空间 (metrizable topological space)。

因为离散度量空间  $(X, d_0)$  中的每一点  $x$  构成的集合  $\{x\} = B(x, 1)$  是  $(X, d_0)$  中的开集, 所以  $X$  的每个子集都是  $X$  的开集 (open set)。从而,  $X$  的幂集  $2^X$  构成  $X$  的一个拓扑。称  $(X, 2^X)$  为离散拓扑空间 (discrete topological space)。

### 3.1.2 拓扑空间的子集

**定义 3.1.4 (拓扑空间中的闭集)** 设  $A$  为拓扑空间  $(X, \tau)$  中的子集, 若  $A$  的余集  $A^c \in \tau$ , 则称  $A$  为拓扑空间  $(X, \tau)$  中的闭集 (closed set)。

根据开集公理, 对任一拓扑空间  $(X, \tau)$ ,  $X, \emptyset \in \tau$ , 所以  $\emptyset$  和  $X$  既是开集又是闭集。而对离散拓扑空间  $(X, 2^X)$  而言,  $X$  的任一个子集  $A \in 2^X$ , 所以  $X$  的每个子集也都是  $X$  既开又闭的子集。

**【例 3.1.3】** 设  $X = \{0, 1, 2\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, X\}$ , 验证可知: 子集  $\{2\}$  和  $\{1, 2\}$  为拓扑空间  $(X, \tau)$  中的闭集。 $\emptyset$  和  $X$  是  $(X, \tau)$  的既开又闭的子集。 $\{1\}, \{0, 1\}$  和  $\{0, 2\}$  既不是开集, 也不是闭集。

**定理 3.1.1** 设  $F$  为拓扑空间  $(X, \tau)$  的所有闭集构成的集簇, 则:

(1)  $\emptyset, X \in F$ ;

(2) 若  $A_1, A_2 \in F$ , 则  $A_1 \cup A_2 \in F$ ;

(3) 若  $F_0 \subset F$ , 则  $\bigcap_{A \in F_0} A \in F$ 。

证明: (1) 显然成立。

(2)  $\forall A_1, A_2 \in F, A_1^c, A_2^c \in \tau$ 。由 De Morgan 公式可知, 有  $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \in \tau$ 。所以,  $A_1 \cup A_2 \in \tau$ 。

(3) 因为  $F_0 \subset F$ , 所以  $\forall A \in F_0, A^c \in \tau$ 。由 De Morgan 公式可知, 有:

$$\left( \bigcap_{A \in F_0} A \right)^c = \bigcup_{A \in F_0} A^c \in \tau$$

所以有  $\bigcap_{A \in F_0} A \in F$ 。证毕。

**定义 3.1.5 (聚点、导集、孤立点和闭包)** 设  $A$  为空间  $X$  的子集,  $x \in X$ 。若点  $x$  的每个开邻域  $U$ , 都有  $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的聚点 (accumulation point)。  $A$  的所有聚点构成的集合称为  $A$  的导集 (derived set), 记为  $A^d$ 。  $A \setminus A^d$  中的点称为  $A$  的孤立点 (acnode)。  $A$  与  $A^d$  的并集  $A \cup A^d$  称为  $A$  的闭包 (closure), 记为  $\bar{A}$ 。

可以证明  $A$  的导集是包含  $A$  的所有闭集的交集, 即  $\bar{A} = \bigcap \{B \mid B \text{ 为闭集 } A \subset B\}$ 。所以,  $\bar{A}$  是包含  $A$  的最小闭集。特别地,  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ 。

**定理 3.1.2**  $A$  为闭集  $\Leftrightarrow \bar{A} = A$ 。

**定义 3.1.6 (内部和边界)** 设  $A$  为空间  $X$  的子集, 含于  $A$  中的最大开集称为  $A$  的内部 (internal), 记为  $\text{Int}A$ 。也就是说  $A$  的内部是由包含于  $A$  的所有开集的并集。  $A$  的闭包  $\bar{A}$  与  $A$  的余集的闭包的交集  $\bar{A} \cap \bar{A}^c$  称为  $A$  的边界 (boundary), 记为  $\partial A$  或  $A^b$ 。

**定理 3.1.3**  $A$  为开集  $\Leftrightarrow \text{Int}A = A$ 。

### 3.1.3 拓扑空间的映射

**定义 3.1.7 (连续映射)** 设  $X, Y$  为拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  为映射,  $x \in X_0$ , 若对  $f(x)$  的任一个开邻域  $U$ , 存在  $x$  的开邻域  $V$ , 使得  $V \subset f^{-1}(U)$ , 则称  $f$  在点  $x$  处连续。若  $f$  在  $X$  的每点  $x$  处都是连续的, 则称  $f$  是连续映射 (continuous mapping)。

**定理 3.1.4** 设  $X, Y$  为拓扑空间, 则  $f: X \rightarrow Y$  为连续映射  $\Leftrightarrow$  对  $Y$  的任意开集  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  为  $X$  的开集;  $\Leftrightarrow$  对  $Y$  的任意闭集  $V$ ,  $f^{-1}(V)$  为  $X$  的闭集。

特别地, 对常值映射  $f: X \rightarrow Y$  (即  $\forall x \in X, f(x) = y_0, y_0 \in Y$  是固定点) 而言,  $Y$  中的每个开集的原象是  $\emptyset$  或  $X$ , 所以  $f$  是连续的。

**定义 3.1.8 (开映射和闭映射)** 设  $X, Y$  为拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是映射, 若对  $X$  的任意开集  $V$ ,  $f(V)$  是  $Y$  的开集, 则称  $f$  为开映射; 若对  $X$  的任意闭集  $U$ ,  $f(U)$  是  $Y$  的闭集, 则称  $f$  为闭映射。

**定义 3.1.9 (同胚)** 设  $X, Y$  为拓扑空间, 若  $f: X \rightarrow Y$  为双射, 并且  $f$  和  $f^{-1}$  都是连续映射, 则称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  上的同胚映射, 简称同胚 (homeomorphism)。若存在从拓扑空间  $X$  到拓扑空间  $Y$  上的同胚, 则称  $X$  与  $Y$  同胚, 记为  $X \cong Y$ 。

**定理 3.1.5** 设  $X, Y$  为拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  为双射, 则称以下命题等价:

(1)  $f$  是同胚;

(2)  $f$  是连续映射且是开映射;

(3)  $f$  是连续映射且是闭映射。

**【例 3.1.4】** 点  $N = (0, \dots, 0, 1)$  是  $n$  维单位球面:

$$S^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2} = 1\}$$

上的一点, 称为球面  $S^n$  的北极点, 证明:  $S^n \setminus \{p\}$  与  $R^n$  同胚。

**证明:** 定义球极投影  $f: S^n \setminus \{p\} \rightarrow R^n$  为:  $\forall x \in S^n \setminus \{p\}$ , 从点  $N$  出发的过点  $x$  的射线和赤道平面的交点为  $f(x)$ 。不难求得  $f(x)$  的解析表达式:

$$f(x) = \left( \frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right)$$

容易验证  $f$  是同胚。

**定理 3.1.6** 设  $X, Y, Z$  为拓扑空间, 则:

(1)  $X \cong Y$ ; (自反性)

(2)  $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$ ; (对称性)

(3)  $X \cong Y, Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$ 。(传递性)

由定理 3.1.6 可知, 同胚是拓扑空间之间存在的一种等价关系。因此, 可以用同胚对拓扑空间进行分类。若同胚的所有拓扑空间都具有同一种拓扑性质, 则称该性质为拓扑不变性。拓扑学的主要课题就是研究拓扑空间的分类和拓扑不变性。连通性和紧致性就是拓扑空间的两个重要拓扑不变性。

### 3.1.4 拓扑不变性

易知连通关系满足自反性、对称性和传递性, 即连通关系是等价关系。

**定义 3.1.10 (连通空间)** 设  $A$  和  $B$  为两个集合,  $A \cap B = \emptyset$ , 则称  $A \cup B$  为  $A$  与  $B$  的分离并。设  $X$  为拓扑空间, 若  $X$  中存在两个不相交的非空开集  $A$  和  $B$ , 使得  $X$  为  $A$  与  $B$  的分离并, 则称  $X$  为不连通空间。否则, 称  $X$  为连通空间 (connected space)。

易知  $R^n$  是连通的。

**定理 3.1.7** 设  $f$  是连通空间  $X$  到空间  $Y$  的一个连续满映射, 则  $Y$  是连通。

由定理 3.1.7 可知, 连通性是拓扑不变性。

**定义 3.1.11 (点的连通)** 设  $X$  为拓扑空间,  $x, y \in X$ , 若  $X$  中存在同时包含  $x$  和  $y$  的连通子集, 则称  $x$  与  $y$  是连通的。

易知连通关系满足自反性、对称性和传递性, 即连通关系是等价关系。

**定义 3.1.12 (连通分支)** 设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  中关于点的连通关系的每个等价类  $[x] = \{y \mid \text{存在的连通子集同时包含 } x, y\}$  为  $X$  的一个连通分支 (connected component)。

由定义 3.1.12 可知,  $X$  为其所有连通分支之并;  $X$  的不同连通分支不相交。

**定义 3.1.13 (局部连通)** 设  $X$  为拓扑空间,  $x \in X$ , 若  $\forall U \in U_x$  (其中  $U_x$  为  $x$  的开邻域系),  $\exists V \in U_x$ , 使得:  $V$  是连通的, 并且  $V \subset U$ , 则称  $X$  为在点  $x \in X$  处是局部连通的。若  $X$  在它的每一点处都是局部连通的, 则称  $X$  为局部连通空间。

**定义 3.1.14 (道路连通、道路连通分支)** 设  $X$  为拓扑空间,  $I = [0, 1]$  为实直线的子空间。连续映射  $\alpha: I \rightarrow X$  称为  $X$  中连接点  $\alpha(0)$  与  $\alpha(1)$  的一条道路。 $\alpha(0)$ 、 $\alpha(1)$  分别称为道路

$\alpha$  的起点和终点。当  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$  时, 也称  $\alpha$  为以  $x_0$  为基点的闭道路。若  $X$  的每一对点都可以由一条道路连接, 则称  $X$  是道路连通空间。拓扑空间  $X$  关于点  $x$  的路连通关系的等价类  $[x] = \{y \mid \text{存在道路 } \alpha: I \rightarrow X, \text{ 使得 } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$  称为  $X$  的一个道路连通分支。

下面我们讨论拓扑空间的另外一种拓扑不变性——紧致性。

**定义 3.1.15 (覆盖、紧致空间)** 设  $X$  为拓扑空间,  $B \subset X$ ,  $A$  为  $X$  的子集簇。若  $B \subset \bigcup_{A \in A} A$ ,

则称集簇  $A$  为  $B$  的覆盖 (cover); 并且当  $A$  为  $X$  的开 (闭) 集族时, 则称  $A$  为  $B$  的开 (闭) 覆盖; 当存在  $A_1 \subset A$  也使  $B \subset \bigcup_{A \in A_1} A$  时, 称  $A_1$  为  $A$  (关于  $B$ ) 的子覆盖。若拓扑空间  $X$  的每个

开覆盖都有有限子覆盖, 则称  $X$  为紧致空间 (compact space)。

紧致空间的等价说法是该空间的任何一个点列总有收敛子序列。

**【例 3.1.5】** 离散空间  $(X, 2^X)$  是紧致的当且仅当  $X$  是有限集。

**【例 3.1.6】** 考虑  $R$ , 因为  $A = \{(-n, n) \mid n \in N\}$  为  $R$  的开覆盖, 但  $A$  的任何有限子族:

$$\{(-n_1, n_1), (-n_2, n_2), \dots, (-n_k, n_k)\}$$

的并为  $(-n, n)$ , 其中  $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ , 而不可能有  $R \subset (-n, n)$ 。所以  $A$  的任何有限子族都不是  $R$  的覆盖, 也就是说  $A$  没有有限子覆盖。

**定理 3.1.8** 设  $f$  为紧致空间  $X$  到任意空间  $Y$  的连续映射, 则  $Y$  必是紧致空间。

由此可知, 紧致性是拓扑不变性。

**定理 3.1.9** 紧致空间的闭子集必是紧致的。

**定理 3.1.10**  $X_1, \dots, X_n$  是紧致空间当且仅当直积空间  $X_1 \times \dots \times X_n$  是紧致空间。

下面讨论拓扑空间的分离性。

**定义 3.1.16 (豪斯多夫空间)** 设  $X$  是拓扑空间, 若  $\forall x, y \in X, x \neq y$ , 存在  $x, y$  的开邻域  $U \in U_x, V \in V_y$  ( $U_x$  和  $V_y$  表示点  $x, y$  的开邻域系), 使得  $x \notin V, y \notin U$ , 则称  $X$  为  $T_1$  空间。若对  $\forall x, y \in X, x \neq y$ , 存在  $x, y$  的开邻域  $U \in U_x, V \in V_y$ , 使得  $U \cap V = \emptyset$ , 则称  $X$  为豪斯多夫空间 (Hausdorff space) 或  $T_2$  空间。

特别地, 度量空间是豪斯多夫空间。事实上, 令  $d(x, y) = 2\varepsilon$ , 则根据三角不等式可知, 分别以  $x$  和  $y$  为中心、 $\varepsilon$  为半径的邻域不相交。

**【例 3.1.7】** 设  $X$  为无限集,  $\tau = \{U \subset X \mid U^c \text{ 有限}\} \cup \{\emptyset\}$  为  $X$  的拓扑。对  $\forall x, y \in X, x \neq y$ , 存在  $U = X \setminus \{y\} \in U_x, V = X \setminus \{x\} \in U_y$ , 使得  $y \notin U, x \notin V$ , 故  $(X, \tau)$  为  $T_1$  空间。由于拓扑空间  $(X, \tau)$  的任意两个非空开集都相交, 因此  $(X, \tau)$  不是  $T_2$  空间。

**定理 3.1.11** 设  $X$  是紧致  $T_2$  空间  $X$  的子集, 则  $A$  为闭集当且仅当  $A$  为紧致子集。

考虑  $f: X \rightarrow Y$ , 其中  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $Y$  为非空集合。容易验证  $\tau/f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in \tau\}$  是  $Y$  上的一个拓扑, 即  $U \in \tau/f$  是  $Y$  的开集  $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$  是  $X$  中的开集。并且  $\tau/f$  是  $Y$  上使得  $f$  连续的最大拓扑, 即  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau/f)$  连续, 并且若  $\tau'$  是  $Y$  上使映射  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  是连续的, 则  $\tau' \subset \tau/f$ 。由此引入商拓扑的定义。

**定义 3.1.17 (商拓扑)** 设  $f: X \rightarrow Y$  为满映射, 其中  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $Y$  为非空集合, 称  $Y$  上的拓扑  $\tau/f$  为  $Y$  关于  $f$  和  $(X, \tau)$  的商拓扑 (quotient topology)。若  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau/f)$  是满的连续映射, 则称  $f$  为商映射 (quotient mapping)。

**定义 3.1.18 (商空间)** 设  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $\sim$  为  $X$  中的等价关系。  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  为将

$x \in X$  映为等价类  $[x] \in X/\sim$  的自然投影, 称空间  $X/\sim$  为  $X$  关于等价关系  $\sim$  的商空间 (quotient space)。

易知: 若  $x \sim y$ , 则  $[x] = [y]$ 。

## 3.2 微分流形

黎曼在高斯古典微分几何工作的基础上, 引进了  $n$  维流形的概念。黎曼的工作是奠基性的、开创性的。古典微分几何中, 将曲面放在三维欧氏空间中研究, 将曲面看成是三维欧氏空间的附属物。而黎曼开创的现代微分几何, 则把曲面看成是与三维欧氏空间具有同等地位的独立几何实体, 并由此引入高维抽象流形。这样的思想转变在出现之初并不容易被人接收。1915 年, 美国物理学家爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955 年) 利用黎曼几何和张量分析等工具创立了广义相对论, 这极大地促进了黎曼几何的发展。从 1908 年创立狭义相对论到 1915 年创立广义相对论, 爱因斯坦花了七年时间。他曾经说过: “为什么还需要七年才能建立广义相对论呢? 主要原因是: 要摆脱 ‘坐标必须有直接的度量意义’ 这个旧概念是不容易的。” 无独有偶, 法国著名数学家阿达马 (J. S. Hadamard, 1865—1963 年) 在论述以流形理论为基础的李群理论时也曾说过: “要想对李群理论保持着不只是初等的、肤浅的, 而是更多一些的理解, 感到有着不可克服的困难。”

在本节中, 我们将按照附加结构的观点依次建立拓扑流形和微分流形等概念, 并介绍一些重要的微分流形例子。

### 3.2.1 拓扑流形

在欧氏几何中, 可通过引入一个统一的直角坐标系的办法给出欧氏空间中点的坐标, 进而将几何问题代数化。而要引入流形这样一个新的几何空间, 同样必须解决如何给流形上的点赋予坐标的问题。这一问题导致了拓扑流形的概念。

**定义 3.2.1 (拓扑流形)** 如图 3.2.1 所示, 称豪斯多夫空间  $M$  是一个  $n$  维的拓扑流形 (topological manifold), 若  $M$  中的每一点  $p$  处都有一个开邻域  $U \subset M$ , 使得  $U$  和  $n$  维的欧氏空间  $R^n$  中的一个开子集同胚, 即  $\varphi: U \rightarrow V \subset R^n$  为同胚。简称拓扑流形为流形。

一个最基本的拓扑流形例子是欧氏空间  $R^n$ 。

这个定义中涉及了豪斯多夫空间、同胚等拓扑概念。如何理解这样一个抽象的数学定义? 数学中的抽象概念与自然界中的具体事物有着奇妙的对应, 生活中再熟悉不过的一些事物常常是我们理解抽象数学定义的直观模型。下面, 借用鱼身与鱼鳞来形象地解释拓扑流形的定义。

如图 3.2.2 所示, 鱼的表面是一个曲面——二维流形, 鱼的表面密布着鱼鳞。可以把这些鱼鳞视为定义 3.2.1 中的  $U$ 。一个有趣的现象是, 若将一片鱼鳞从鱼身上取下, 要不了多长时间, 它就会变成平的。这可以帮助我们理解定义 3.2.1 中同胚于欧氏空间中的一个开集的要求。事实上, 同胚可以形象地称为橡皮泥变换或橡皮膜变换, 即可以对一片橡皮膜进行膨胀、收缩、延展、变形, 只要不将它撕破。这块平的鱼鳞片是在与鱼身粘接点处的切平面, 可以通过同胚将其进行恰当的变形贴到鱼身上。在流形的每一点处都有一个和流形同维的切空间, 可以在切点附近用它作近似代替, 或者说在流形的每点附近都可以近似地看作欧氏空间。所以, 粗略地说, 流形就是可以局部等同于欧氏空间的几何空间, 或者说可以局部欧氏化的几何空间。



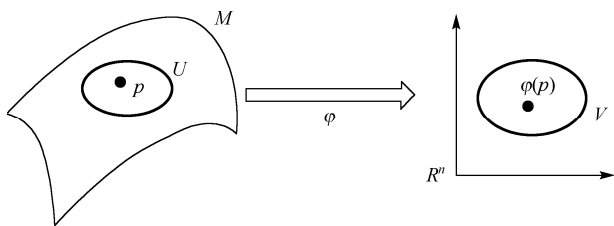


图 3.2.1 拓扑流形

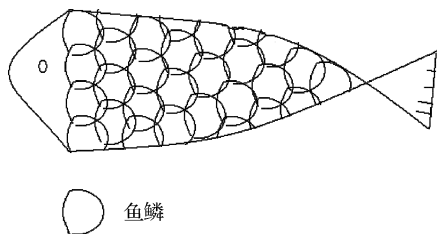


图 3.2.2 鱼身与鱼鳞

从附加结构的角度来看，同胚  $\varphi$  这个特殊的一一映射的作用在于：通过它可以给拓扑流形引入坐标结构。实际上，可以借用流形上的点  $p \in U \subset M$  在  $R^n$  中的像点  $\varphi(p)$  的坐标作为点  $p$  的坐标。考虑到  $U$ 、 $\varphi$  所起的作用，把  $(U, \varphi)$  称为  $M$  的一个坐标卡。但是对  $\varphi$  而言，它起作用的只是在邻域  $U \subset M$  上，是局部的。因此，在流形上，一般无法找到一个大范围适用的统一坐标系，多数情况下找到的都是局部坐标系。我们也把流形的坐标卡集称为坐标图册，即可以按图索骥地根据这个坐标图册找到流形上任一点  $p$  的坐标。

流形的概念是几何学发展的一个重要成果。在 1979 年发表的《从三角形到流形》一文中，陈省身先生将几何比作人体，而坐标看作衣服，将几何学的发展历史形象地概括为：综合几何——裸体人；坐标几何——原始人；流形——现代人。

### 3.2.2 微分流形

流形的局部坐标系带来的一个问题是：对  $\forall p \in M$ ， $p$  点可能在其他坐标卡的作用下获得其他的坐标，比如  $p$  点也在另一个坐标卡  $(V, \psi)$  中，那么它将有二个不同的坐标（即  $\varphi(p)$ 、 $\psi(p)$  的坐标）。那么，该如何解决这个问题呢？

我们还是借用鱼身来形象地解释。仔细观察鱼身，发现相邻的鱼鳞之间是互相叠加的，即有公共部分。这样，可以由一片鱼鳞过渡到另外一片，这样逐步走遍鱼身。但这些鱼鳞片的叠加必须是以一种自然的方式进行的，由一片鱼鳞过渡到另外一片必须是平滑的，这样才能恰好覆盖住鱼身——这个弯曲的二维流形上。对应地，流形的两个相交的坐标邻域要定义它们的一种所谓相容性。因此，流形上仅有坐标结构还是远远不够的。从另一个角度来看，微分几何是要在流形上进行微积分的。为此，也需要进一步发展流形的概念，在拓扑流形上指定微分结构这种附加结构，从而获得微分流形的概念。

**定义 3.2.2（微分流形）** 设  $M$  为一个  $n$  维的拓扑流形，若存在流形  $M$  的一个坐标卡集  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$  满足如下条件：

- (1)  $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$  构成流形  $M$  的一个开覆盖；
- (2) 属于  $A$  的任意两个坐标卡是  $C^r$ -相关的，即：如图 3.2.3 所示，对  $\forall (U, \varphi), (V, \psi) \in A$ ，当  $U \cap V \neq \emptyset$  时， $\psi \circ \varphi^{-1}$  和  $\varphi \circ \psi^{-1}$  都是  $C^r$  的；
- (3)  $A$  是极大的，若  $(U, \varphi)$  是  $M$  的一个坐标卡，且  $(U, \varphi)$  与  $A$  的每个成员都是  $C^r$  相关的，则  $(U, \varphi)$  属于  $A$ ；则称  $A$  为  $M$  的一个  $C^r$  微分结构（differentiable structure）。若在拓扑流形  $M$  指定了  $C^r$  微分结构  $A$ ，则称  $(M, A)$  为  $C^r$  微分流形（differentiable manifold），简记为  $M$ 。特别地，若  $r = \infty$ ，则称  $M$  为光滑流形（smooth manifold）。

因此,可以说:微分流形是具有微分结构的拓扑流形。微分结构的引入使我们能在流形上进行微积分。

定义中的这几个要求同样比较抽象、难于理解。仍借用鱼身来形象地解释。把鱼鳞看成是定义 3.2.2 中的  $U$ 。根据生活经验,我们知道鱼身上的鱼鳞分布方式应该满足:

- (1) 这些鱼鳞必须完全盖住鱼身;
- (2) 邻近鱼鳞的边缘是以一种自然的方式叠加在一起的,可以平滑地由一片鱼鳞过渡到另外一片(一般的微分流形要求比平滑性更高);
- (3) 若还有这样的鱼鳞,那么它也可以贴到鱼身上。

这些要求恰好分别对应于微分结构的三个条件,可以看作这三个条件的一种形象的解释。

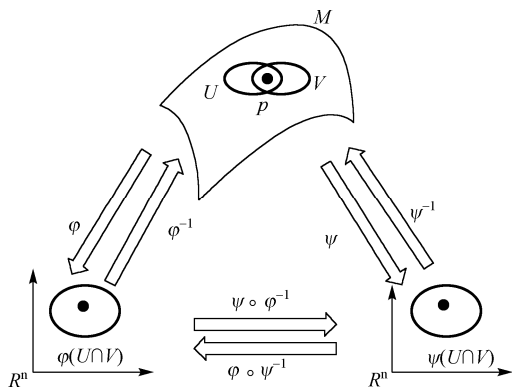


图 3.2.3 坐标卡的相容性

另外,微分流形的定义 3.2.2 中蕴含着由局部到整体的数学思想方法,这也是微分几何的重要思想方法。事实上,微分几何是通过使用一些局部的工具来探求那些不随坐标变换发生变化的性质和量。正如陈省身先生所指出的:“流形内的坐标是局部的,本身没有意义;流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量、微分式等)。”

从附加结构的角度来看,上述定义过程就是在几何空间上不断添加附加结构的过程。定义 3.2.1 和定义 3.2.2 相当于在一个豪斯多夫空间上依次添加了拓扑结构、坐标结构、微分结构。添加的附加结构越多,所获得的几何空间越特殊,其上可供使用的研究工具也就越多。当然,根据研究的需要,还可以在流形上继续添加其他合适的附加结构,如联络结构、群结构、复结构等。在 5.2 节中,我们将给流形添加一种更为重要的附加结构——黎曼度量结构,从而引入黎曼流形的概念。

### 3.2.3 微分流形的例子

**定理 3.2.1** 设  $M$  为一个豪斯多夫空间,若存在同胚映射  $\varphi$ ,使得  $M$  同胚于  $R^n$  中的一个开集,即  $\varphi: M \rightarrow \varphi(M) \subset R^n$ ,则称  $(M, \varphi)$  为一个  $n$  维光滑流形,其中  $A = \{(M, \varphi)\}$ 。

**定义 3.2.3 (简单曲线)** 若映射  $f: (a, b) \subset R^1 \rightarrow R^n, t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$  为连续的双射,则称  $f$  为  $R^n$  中的一条简单曲线。

易知  $R^n$  中的一条简单曲线为一个一维的光滑流形,其图像为  $R^n$  中的一条不自交连续曲线。

**【例 3.2.1】**  $R^3$  中的圆柱螺线为:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = a \cos t, x_2 = a \sin t, x_3 = bt, -\infty < t < \infty\} \quad (3.2.1)$$

可取同胚映射为  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(a \cos t, a \sin t, bt) = t$ 。所以,  $R^3$  中的圆柱螺线为简单曲线,是一个一维流形。

**【例 3.2.2】**  $R^2$  中的开圆为:

$$M = \{(x_1, x_2) | x_1 = a \cos t, x_2 = a \sin t, 0 < t < 2\pi\} \quad (3.2.2)$$

可取同胚映射为  $\varphi(a \cos t, a \sin t) = t$ 。所以,  $R^2$  中的开圆为简单曲线,是一个一维流形。

**定义 3.2.4** ( $R^3$  中的简单曲面) 设  $D$  为  $R^2$  中的一个单连通开集, 映射:

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow f(D) \subset R^3 \\ (u, v) &\mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{aligned}$$

为连续的双射。

由定义 3.2.4 可知,  $R^3$  中简单曲面的图像为  $R^3$  中的一片不自交连续曲面。由定理 3.2.1 可知,  $R^3$  中的简单曲面为二维光滑流形。

**【例 3.2.3】**  $R^3$  中的简单开柱面为:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = a \cos u, x_2 = a \sin u, x_3 = v, (u, v) \in D = (0, 2\pi) \times R^1\} \quad (3.2.3)$$

它是  $R^3$  中的一个简单曲面。

**【例 3.2.4】** 如图 3.2.4 所示,  $R^3$  中的简单开球面为:

$$\begin{aligned} M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| \begin{aligned} &x_1 = a \cos u \cos v, x_2 = a \sin u \cos v, x_3 = a \sin v, \\ &(u, v) \in D = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

它也是  $R^3$  中的一个简单曲面。

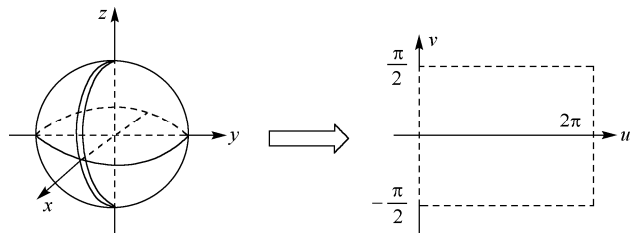


图 3.2.4 简单开球面

以上例子中的同胚实质可以概括为: 从哪里来, 就回到哪里去。这几个流形的微分结构较为简单、特别, 下面来研究具有较为复杂、典型微分结构的微分流形的例子。

**【例 3.2.5】** 求证:  $n$  维单位球面

$$S^n = \left\{ x \in R^{n+1} \middle| 1 = \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2} \right\}$$

是一个  $n$  维微分流形。

**证明:** 首先,  $S^n$  作为豪斯多夫空间  $R^{n+1}$  的子空间, 也是一个豪斯多夫空间。下面来构造  $S^n$  上的一个微分结构。对  $1 \leq \alpha \leq n+1$ , 集合

$$\tilde{U}_\alpha^- = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} | x^\alpha < 0\}$$

和

$$\tilde{U}_\alpha^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} | x^\alpha > 0\}$$

是  $R^{n+1}$  中的两个开集。作为它们与  $S^n$  的交集, 集合

$$U_\alpha^- = \tilde{U}_\alpha^- \cap S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n | x^\alpha < 0\}$$

和

$$U_{\alpha}^{+} = \tilde{U}_{\alpha}^{+} \cap S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid x^{\alpha} > 0\}$$

是  $S^n$  中的两个开集。并且它们构成  $S^n$  的一个开覆盖，有：

$$S^n = \bigcup_{\alpha=1}^{n+1} (U_{\alpha}^{+} \cup U_{\alpha}^{-}) \quad (3.2.5)$$

然后，来构造局部坐标系和微分结构。定义

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{+}: U_{\alpha}^{+} &\rightarrow R^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \varphi_{\alpha}^{+}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{-}: U_{\alpha}^{-} &\rightarrow R^n \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \varphi_{\alpha}^{-}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

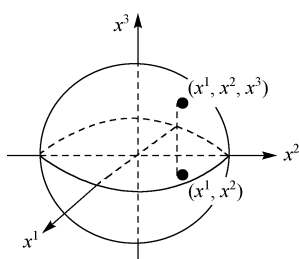


图 3.2.5 单位球面

实际上，如图 3.2.5 所示， $\varphi_{\alpha}^{+}$ 、 $\varphi_{\alpha}^{-}$ 将“半球面”（借用三维空间的名称）沿轴分别投影到平面  $x^{\alpha} = 0$  上，获得的是一个“单位圆盘”。

当  $\alpha \neq \beta$  时，有  $U_{\alpha}^{+} \cap U_{\alpha}^{-} = \emptyset$  和  $U_{\beta}^{+} \cap U_{\beta}^{-} = \emptyset$  成立。但是， $U_{\alpha}^{+} \cap U_{\beta}^{+} \neq \emptyset$ ， $U_{\alpha}^{+} \cap U_{\beta}^{-} \neq \emptyset$ ， $U_{\alpha}^{-} \cap U_{\beta}^{+} \neq \emptyset$ ， $U_{\alpha}^{-} \cap U_{\beta}^{-} \neq \emptyset$ 。不妨考虑集合  $U_{\alpha}^{-} \cap U_{\beta}^{+}$ ，有：

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{-} \circ (\varphi_{\beta}^{+})^{-1}: \varphi_{\beta}^{+}(U_{\alpha}^{-} \cap U_{\beta}^{+}) &\rightarrow \varphi_{\alpha}^{-}(U_{\alpha}^{-} \cap U_{\beta}^{+}) \\ (x^1, \dots, \hat{x}^{\beta}, \dots, x^{n+1}) &\mapsto \varphi_{\alpha}^{-} \circ (\varphi_{\beta}^{+})^{-1}(x^1, \dots, \hat{x}^{\beta}, \dots, x^{n+1}) \end{aligned}$$

所以，有：

$$\begin{aligned} &\varphi_{\alpha}^{-} \circ (\varphi_{\beta}^{+})^{-1}(x^1, \dots, \hat{x}^{\beta}, \dots, x^{n+1}) \\ &= (x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{\beta-1}, \sqrt{1 - \sum_{\gamma \neq \beta} (x^{\gamma})^2}, x^{\beta+1}, \dots, x^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

同理，有：

$$\begin{aligned} &\varphi_{\beta}^{+} \circ (\varphi_{\alpha}^{-})^{-1}(x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{n+1}) \\ &= (x^1, \dots, x^{\alpha-1}, -\sqrt{1 - \sum_{\gamma \neq \alpha} (x^{\gamma})^2}, x^{\alpha+1}, \dots, \hat{x}^{\beta}, \dots, x^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

由式 (3.2.6) 和式 (3.2.7) 观察可知，复合映射  $\varphi_{\alpha}^{-} \circ (\varphi_{\beta}^{+})^{-1}$  和  $\varphi_{\beta}^{+} \circ (\varphi_{\alpha}^{-})^{-1}$  都是  $R^n$  上的光滑函数。从而， $(U_{\alpha}^{-}, \varphi_{\alpha}^{-})$  与  $(U_{\beta}^{-}, \varphi_{\beta}^{-})$  是  $C^{\infty}$  相关的。类似可证明其他坐标卡也是  $C^{\infty}$  相关的。

综上所述， $A = \{(U_{\alpha}^{+}, \varphi_{\alpha}^{+}), (U_{\alpha}^{-}, \varphi_{\alpha}^{-}) \mid 1 \leq \alpha \leq n+1\}$  是  $S^n$  上的一个光滑结构。所以， $S^n$  是一个  $n$  维光滑流形。证毕。

另外，也可以利用球极投影来构造球面的光滑结构，参见本章习题。

**【例 3.2.6 (积流形)】** 设  $(M_1, A_1)$  和  $(M_2, A_2)$  分别是  $m$  维和  $n$  维的光滑流形，其中  $A_1 = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}) \mid \alpha \in I_1\}$  和  $A_2 = \{(V_i, \psi_i) \mid i \in I_2\}$  是它们的微分结构。令  $M = M_1 \times M_2$ ，则  $\{U_{\alpha} \times V_i \mid \alpha \in I_1, i \in I_2\}$  构成  $M$  的一个开覆盖。令

$$A = \{(U_{\alpha} \times V_i, \varphi_{\alpha} \times \psi_i) \mid \alpha \in I_1, i \in I_2\}$$

其中，映射  $\varphi_{\alpha} \times \psi_i: U_{\alpha} \times V_i \rightarrow R^{m+n}$  定义为：对  $\forall (p, q) \in U_{\alpha} \times V_i$ ，有：

$$\varphi_\alpha \times \psi_i(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_i(q))$$

则  $A$  是流形  $M$  上的一个光滑结构。事实上,  $\varphi_\alpha \times \psi_i: U_\alpha \times V_i \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i) \subset \mathbb{R}^{m+n}$  是同胚。同时, 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  时, 映射

$$(\varphi_\alpha \times \psi_i) \circ (\varphi_\beta \times \psi_j)^{-1} = :(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \times (\psi_i \circ \psi_j^{-1})$$

和

$$(\varphi_\beta \times \psi_j) \circ (\varphi_\alpha \times \psi_i)^{-1} = :(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \times (\psi_j \circ \psi_i^{-1})$$

是光滑的。 $(U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i)$  和  $(U_\beta \times V_j, \varphi_\beta \times \psi_j)$  是  $C^\infty$  相容的, 故  $(M, A)$  是一个  $m+n$  维的光滑流形, 称  $M$  是流形  $M_1$  和  $M_2$  的积流形 (product manifold)。

**【例 3.2.7 (环面)】** 根据例 3.2.5 的讨论, 一维球面  $S^1$  是一维的光滑流形。用  $S^1$  和自身做出的积流形  $S^1 \times S^1$ , 称为二维环面 (torus), 记为  $T^2$ 。可以用这种方式, 累积生成  $n$  维环面  $T^n$ 。图 3.2.6 所示为利用 MATLAB 绘制出的二维环面图形。

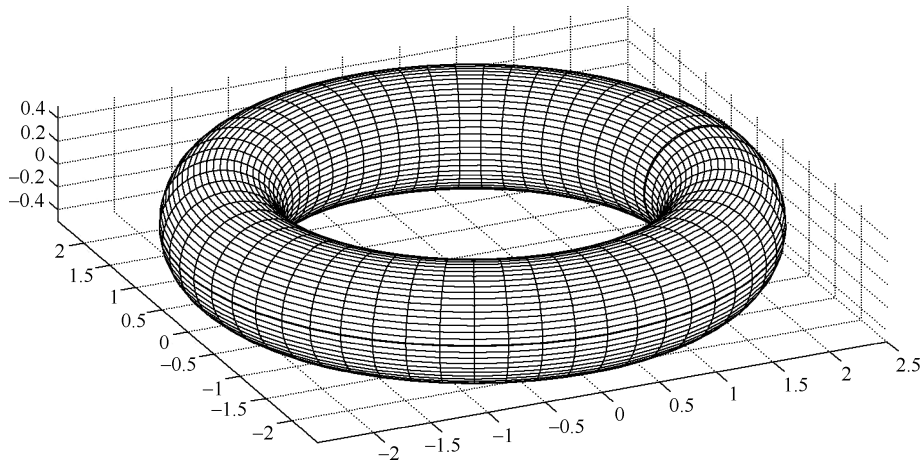


图 3.2.6 环面

## 附录 3.2 黎曼生平及学术贡献

黎曼 (G. F. B. Riemann, 1826—1866 年) (图 3.2.7), 德国著名数学家、几何学家, 黎曼几何的创立者。他被公认为是数学史上最具创新性精神的数学家之一。

黎曼生于德国汉诺威的一个牧师家庭。由于黎曼父亲的收入不多, 加上黎曼还有 5 个兄弟姐妹, 其家庭经济状况一直比较拮据。这也导致了他的几个兄弟姐妹和他的母亲过早地离世了。黎曼在中学时期就展现了他在数学方面异于常人的领悟能力: 他曾经仅用几天时间读完勒让德 (A. M. Legendre, 1752—1833 年) 所著的一本 859 页的《数论》。1846 年, 19 岁的黎曼在哥廷根大学成为专修语言和神学的学生。在这期间, 他逐渐对数学产生了浓厚的兴趣。他学习了斯特恩 (Stern) 关于方程论和定积分的课, 以及高斯关于最小二乘法等课程。

1847 年, 黎曼转到柏林大学 (图 3.2.8)。在那里, 他接触到了几位著名的数学大师: 雅克比 (C. Jacobi, 1804—1851 年)、狄利克雷 (J. Dirichlet, 1805—1859 年)、施泰纳 (J. Steiner,

1796—1863 年)、爱森斯坦 (F. G. M. Eisenstein, 1823—1852 年)。1849 年春, 黎曼回到哥廷根继续完成他的数学学业并准备取得博士学位。1851 年 11 月月初, 黎曼在高斯指导下提交他的博士论文《单复变函数一般理论基础》参加答辩并取得博士学位。高斯对他博士论文的评论是: “黎曼先生提交的博士论文……显示一个具有创造性的、活跃的、真正数学的头脑以及了不起的富有成果的创造性……它不仅符合博士论文所要求的各项标准, 而且远远超出了它们。”



图 3.2.7 黎曼

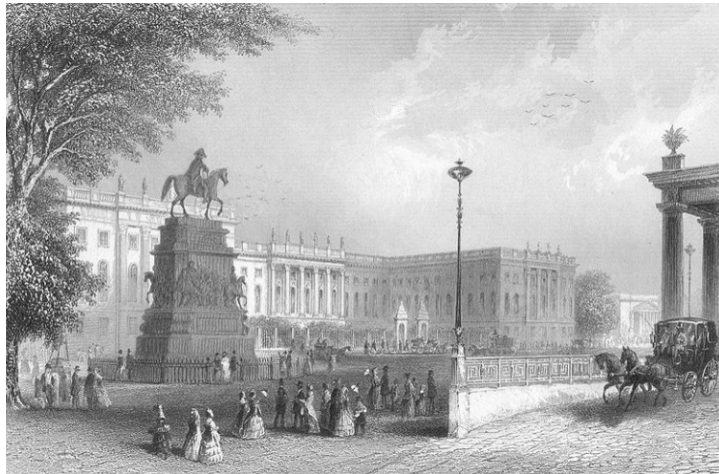


图 3.2.8 柏林大学

为了能够取得讲师职位, 黎曼必须做一次演讲。为此, 黎曼向高斯提交了三个可能的报告题目。其中第三个题目是涉及几何基础的问题, 黎曼对这个题目并没有做过多少案头准备工作, 因此黎曼从心底里希望高斯不要选中它, 而希望选中他擅长的三角级数 (傅里叶级数) 的问题。可是, 高斯对第三个题目却深有研究。事实上, 他已思考这个问题长达 60 年之久。出于想看看黎曼对这个深奥的问题会做些什么样创造性工作的目的, 高斯指定了第三个题目作为黎曼就职演讲论文的题目。这个问题就是《论作为几何学基础的假设》(德文原标题: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 英文翻译标题: *On the hypotheses which underlie geometry*)。

在此之后的几年里, 黎曼的经济状况和生活条件并没有得到多大的改善。而且, 他的父亲和妹妹也相继去世。生活的不如意并没有压垮黎曼, 他全身心地投入到数学研究工作之中, 并获得了令人惊异的研究成果。他在数学上的许多重要工作都是在这个时期内完成的。在此期间, 他在阿贝尔积分、阿贝尔函数、数论、超几何级数等方面获得了一系列的研究结果, 开创了现代代数几何、解析数论等新领域, 为数学物理和微分方程理论的发展做出了贡献。图 3.2.9 所示为黎曼签名。

图 3.2.9 黎曼签名

1857 年, 黎曼终于获得副教授的职位。1859 年, 在狄利克雷去世后, 黎曼成为狄利克雷

的继任者。1859 年,他被选为柏林科学院通讯院士,并被哥廷根科学会接纳为正式会员。1860 年,在巴黎访问期间,黎曼在 1854 年演讲的研究基础之上对黎曼几何学做了进一步发展。1862 年 7 月,黎曼因肋膜炎发展为肺结核。之后,他转到意大利疗养。在意大利疗养治病期间,他在身体条件许可的情况下仍然继续他的研究工作。1866 年 3 月,他当选为柏林科学院国外院士。1866 年 7 月 14 日,当选为英国皇家学会国外会员。1866 年 7 月 20 日,他在意大利塞拉斯卡逝世。

回顾黎曼短暂的一生,有许多东西值得我们深思和学习。40 岁时,黎曼即英年早逝。早年穷困的家庭条件影响了他的健康,经济拮据也一直困扰着他一生大部分的时间,病痛在他生命的最后时光里一直折磨着他。即使在这样糟糕的情况下,黎曼却给数学和世人留下了宝贵的财富。在短暂一生中,他做出了许多开创性的工作。虽然黎曼正式发表的著作并不多(图 3.2.10 所示为黎曼论文手稿),但是这些著作却都异常深刻,极富创造性,所以他被公认为是数学史上最具创新性精神的数学家之一。黎曼是对现代数学发展影响最大的数学家之一,他的学术影响遍布多个数学分支,并且仍在影响着他去世一百多年以后的现代数学发展。例如,2000 年 5 月 24 日,著名的美国克雷数学研究所(Clay Mathematics Institute,简称 CMI)公布了 7 个重要的千禧年数学问题,关于素数分布的黎曼猜想就位列其中。黎曼猜想被公认为是目前数学研究中最重要的重要的公开猜想之一。

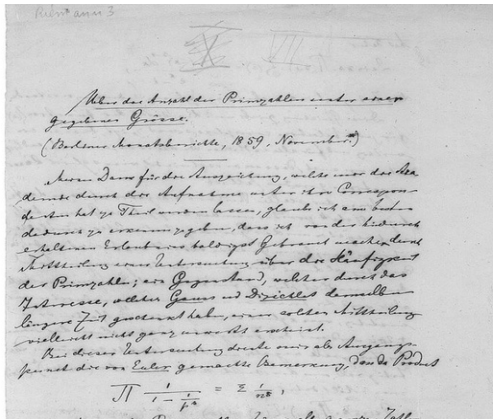


图 3.2.10 黎曼论文手稿

### 3.3 光滑映射和微分同胚

映射是建立流形间联系的重要桥梁,也是研究流形性质的重要工具。同胚映射保持流形的拓扑特性,而流形间的连续映射保持流形的连续性,可微映射保持流形的可微性。本节将建立流形间的可微映射、光滑映射和微分拓扑等概念。

#### 3.3.1 流形间的光滑映射

设  $M$  为  $n$  维光滑流形,  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$  为其上的微分结构,对  $\forall p \in M$ , 存在点  $p$  的一个容许坐标系  $(U, \varphi; x^1, \dots, x^n)$ ,  $f: M \rightarrow R$  为流形  $M$  上的函数:

$$f(p) = f(\varphi^{-1} \circ \varphi(p)) = f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$$

**定义 3.3.1 (光滑函数)** 设  $M$  为  $n$  维光滑流形,  $f: M \rightarrow R$  是流形  $M$  上的函数。如图 3.3.1 所示, 若多元函数  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset R^n \rightarrow R$  在  $R^n$  中的点  $\varphi(p)$  是连续的 ( $C^r$  可微的, 光滑的), 则称  $f$  在流形  $M$  上的点  $p$  处是连续的 ( $C^r$  可微的, 光滑的)。若  $f$  在流形  $M$  上的任一点处都是连续的 (光滑的), 则称  $f$  是流形  $M$  上的连续函数 (光滑函数)。

用  $C_p^\infty$  表示流形  $M$  上在点  $p$  处的光滑函数所构成的集合, 用  $C_p^\infty(M)$  表示流形  $M$  上光滑函数构成的集合。

该定义是合理的, 即光滑流形  $M$  在点  $p$  处的连续性、可微性和光滑性与坐标卡的选取无关。事实上, 如图 3.3.2 所示, 设  $(V, \psi)$  为  $p$  的另一个坐标卡, 并且  $U \cap V \neq \emptyset$ , 则

$$f \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)} = (f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V)} \circ (\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)}$$

由坐标同胚  $\varphi$  和  $\psi$  的光滑性可知,  $f \circ \psi^{-1}$  在点  $p$  处也是连续的 (光滑的)。

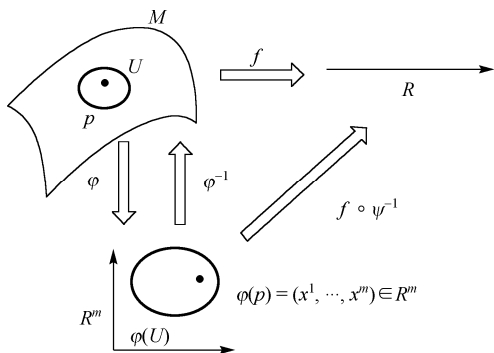


图 3.3.1 光滑函数

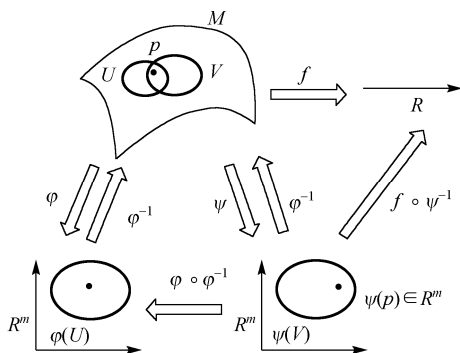


图 3.3.2 定义合理性

可以将上述定义推广到两个微分流形之间。

**定义 3.3.2 (流形间的光滑映射)** 如图 3.3.3 所示, 设  $M$  和  $N$  分别为  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\forall p \in M$ , 若存在流形  $M$  在点  $p$  处的一个坐标卡  $(U, \varphi)$  和流形  $N$  在点  $q = f(p)$  的一个容许坐标卡  $(V, \psi)$ , 使得映射:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset R^m \rightarrow \psi(V) \subset R^n$$

在  $R^m$  中的点  $\varphi(p)$  处是连续的 ( $C^r$  可微的, 光滑的), 则称  $f$  在流形  $M$  上的点  $p$  处是连续的 ( $C^r$  可微的, 光滑的)。若  $f$  在流形  $M$  上的任一点处都是连续的 (光滑的), 则称  $f$  是从流形  $M$  到流形  $N$  的连续映射 (光滑映射)。

特别地, 当  $M$  是  $R$  中的一个开区间  $(a, b)$  时, 定义 3.3.2 给出的光滑映射  $f: (a, b) \rightarrow N$ ,  $t \mapsto f(t) \in N$  称为光滑流形  $N$  中的一条光滑曲线。

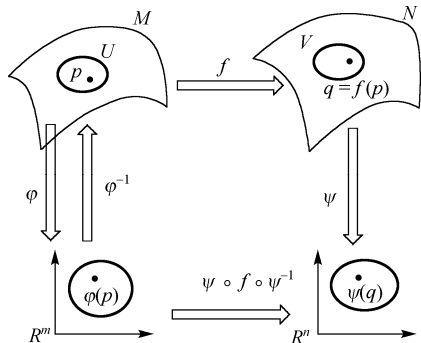


图 3.3.3 流形间的光滑映射

**【例 3.3.1】** 物理学的时间线 (world line) 是粒子

在四维时空中的运动轨迹, 也是四维时空这一流形中的一条曲线。

### 3.3.2 微分同胚

设  $M$  和  $N$  为两个拓扑空间, 若映射  $f: M \rightarrow N$  是双射, 并且  $f$  和  $f^{-1}$  都是连续的, 则  $f$  是同胚。同胚是拓扑空间之间的一种等价关系。事实上, 对两个同胚的拓扑空间而言, 不仅



它们的点集是一一对应的, 而且它们的开集族也是一一对应的。两个同胚的拓扑空间具有相同的拓扑结构和拓扑性质。因此, 从拓扑学的观点来看, 两个同胚的空间可以看作是同一个空间。

**定义 3.3.3 (微分同胚)** 设  $M$  和  $N$  为两个  $m$  维光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是同胚, 若  $f$  和  $f^{-1}$  都是光滑映射, 则称  $f$  为流形  $M$  和  $N$  间的微分同胚。

微分同胚是微分流形间的一种重要的等价关系。从微分几何的观点来看, 两个微分同胚的微分流形可以看作是同一个微分流形。因此, 微分结构、微分同胚的讨论是微分几何中的重要课题。微分同胚也是微分拓扑学研究的重要概念。给定一个拓扑流形, 可能本身不能建立任何微分结构, 或者说无法构造出一个微分流形来。1961 年, 法国数学家克外尔 (M. A. Kervaire, 1927—2007 年) 就使用克外尔不变量 (Kervaire invariant) 说明了没有任何微分结构的拓扑流形的存在性 (参见: M. Kervaire. *A manifold which does not admit any differentiable structure*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1960, 34: 257–270.)。另一方面, 在同一个拓扑流形上, 可能构造出不同的微分结构, 即同一个拓扑流形, 可能构造出不同的微分流形。一个自然的问题是: 这些微分流形是不是微分同胚的? 也就是说, 这些微分结构在微分同胚的意义下是不是唯一的? 下面来考虑一个例子。

**【例 3.3.2】** 考虑  $R$  上的结构:  $A_1 = \{(U, \varphi)\}$ , 其中  $U = R$ ,  $\varphi = I_d$ 。易知,  $M_1 = (R, A_1)$  是光滑流形。再考虑  $R$  上的结构:  $A_2 = \{(V, \psi)\}$ , 其中  $V = R$ ,  $\psi(x) = x^3$ 。易知,  $M_2 = (R, A_2)$  也是光滑流形。

而映射  $\varphi \circ \psi^{-1}: R \rightarrow R$ ,  $y \mapsto x = \sqrt[3]{y}$  在  $y = 0$  处不可导。所以, 坐标卡  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  不是  $C^\infty$ -相关的。故,  $A_1$  和  $A_2$  是  $R$  上的两个不同的微分结构。所以  $M_1 = (R, A_1)$  和  $M_2 = (R, A_2)$  是两个微分流形。

设映射  $f: M_1 \rightarrow M_2$  为  $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$ 。易知,  $f$  是双射, 并且  $f$  和  $f^{-1}$  都是连续的, 故  $f$  是同胚。并且,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = I_d: R \rightarrow R$  是光滑的, 同时  $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}: R \rightarrow R$  也是光滑的, 即  $f$  和  $f^{-1}$  都是光滑的。从而,  $f: M_1 \rightarrow M_2$  是微分同胚。也就是说, 流形  $M$  和  $N$  微分同胚。

这个例子并不能给前述问题提供一个完美的答案, 不能说明同一个拓扑流形上的微分结构都是微分同胚的。例如, 对球面而言, 除了标准微分结构外, 还有其他的微分结构存在。1956 年, 在文章《同胚于 7 维球面的流形》(J. W. Milnor. *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. *Annals of Mathematics*, 1956, 64 (2): 399–405.) 中, 美国著名数学家米尔诺 (J. W. Milnor, 1931 年—) 在 7 维球面上构造出一种被称为 7 维怪球 (exotic sphere) 结构的特殊微分结构, 并且这种微分结构与标准球面结构不是微分同胚的 (参见: J. W. Milnor. *Differentiable structures on spheres*. *American Journal of Mathematics*, 1959, 81 (4): 962–972.)。之后, 米尔诺与克外尔一起计算出: 7 维球面上有 15 种微分结构 (如果考虑定向的话, 有 28 种)。同胚但不微分拓扑于四维欧氏空间  $R^4$  的微分流形称为怪  $R^4$  (exotic  $R^4$ ), 这样的例子由美国数学家弗里德曼 (M. Freedman, 1951 年—) 在 1982 年首先给出 (参见: M. Freedman. *The topology of four-dimensional manifolds*. *Journal of Differential Geometry*, 1982, 17(3): 357–453.)。利用从杨-米尔斯规范场论发展出来的工具, 英国数学家唐纳森 (S. K. Donaldson, 1957 年—) 发现了一大类不具有任何光滑结构的四维拓扑流形。他还从规范场论中获得了多个拓扑不变量, 从而说明某些四维拓扑流形上容许有无穷多个微分结构存在 (参见: S. K. Donaldson. *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. *Journal of Differential Geometry*, 1983, 18: 279–315.)。

### 附录 3.3 惠特尼生平及学术贡献

惠特尼 (H. Whitney, 1907—1989 年), 美国著名数学家、数学教育家。他是奇点理论的创立者, 同时在流形、嵌入、浸入、示性类和几何积分理论等方面做了许多奠基性的工作。他曾获得数学界的两项重要数学奖项: 沃尔夫奖 (Wolf Prize) 和斯蒂尔奖 (Steele Prize)。

1928 年和 1929 年, 惠特尼在耶鲁大学分别取得物理学和音乐学士学位。之后, 他在哈



图 3.3.4 惠特尼

佛大学攻读博士学位, 师从遍历理论方面的著名数学家伯克霍夫 (G. D. Birkhoff, 1884—1944 年)。1932 年, 惠特尼获得数学博士学位, 博士论文的题目是《图的着色》(The Coloring of Graphs)。此时, 他已经在图论方面写了近 10 篇论文。他的早期研究主要集中在图的着色和四色问题。同时, 他为拟阵这一现代组合数学和表示论的基本概念奠定了基础。1931—1933 年, 他担任了美国国家研究委员会的研究员。从 1934 年开始, 他在哈佛大学先后任讲师、副教授, 并于 1946 年升任教授。这期间, 他的研究方向也从图论改为拓扑学。1935 年 9 月, 他参加了在前苏联莫斯科举行的国际拓扑学大会。这次大会对拓扑学的发展产生了深远的影响。二战期间, 他参加了美国的战时研究工作。

惠特尼是微分流形的拓扑学和微分拓扑学的真正创立者。黎曼和庞加莱开始了微分流形的拓扑学研究, 但由于他们所处时代的数学工具不足, 限制了这一理论的产生和进一步完善。惠特尼在 1936 年的论文《微分流形》奠定了微分流形的理论基础: 他给出了微分流形的内蕴定义, 定义了拓扑流形上的  $C^r$  微分结构 ( $1 \leq r \leq \infty$ ), 引入了可微流形、微分流形和光滑流形的概念。同时, 在这篇论文中, 他还证明了著名的惠特尼嵌入定理和浸入定理: 当  $r$  足够大时,  $n$  维  $C^r$  微分流形都可以嵌入到  $R^{2n+1}$  中, 可浸入到  $R^{2n}$  中。1944 年, 他又进一步将这一结果改进为: 嵌入到  $R^{2n}$  中, 浸入到  $R^{2n-1}$  中。1946 年, 他在美国数学会年度大会上做了题为《光滑流形的拓扑学》的大会报告。

惠特尼是一系列新概念、新理论的奠基和开创者, 包括上同调 (cohomology)、纤维丛 (fiber bundle)、示性类 (characteristic classes)、拟阵 (Matroid)、分层理论等。纤维丛和示性类是研究微分流形拓扑的重要工具。惠特尼在 1935 年首次定义了他当时称为球空间的纤维空间, 1940 年他将其改称为球丛。他在 1935 年引入的上同调理论大大推动了代数拓扑学的发展。惠特尼和瑞士数学家施蒂费尔 (E. Stiefel, 1909—1978 年) 分别于 1936 年和 1935 年各自独立建立了实向量丛上的重要拓扑不变量——施蒂费尔-惠特尼示性类 (Stiefel-Whitney characteristic class), 这为示性类理论的发展奠定了基础。在他和其他数学家的推动下, 纤维丛逐渐成为研究同伦、同调等拓扑问题和微分几何相关问题的重要工具。20 世纪 40 年代, 惠特尼首先研究了微分映射的奇点。1955 年, 他对平面微分映射的奇点类型进行分类, 开创了奇点理论。1946 年和 1957 年, 惠特尼建立了几何积分论, 给上链、上闭链等拓扑概念以解析解释, 他还把嘉当及瑞士数学家德拉姆 (G. de Rham, 1903—1990 年) 的外微分形式理论中的可微条件换成李普希茨条件得出的积分理论等价于代数上同调理论, 这些研究结果总

结在《几何积分论》(Geometric Integration Theory)一书中。惠特尼一生共发表论文近 80 篇、专著 3 本:《几何积分论》(如图 3.3.5 所示)、《复解析簇》、《数学活动》。

惠特尼也是著名的数学活动家和领导者:他担任过美国数学会(American Mathematical Society)副主席(1948—1950 年),美国国家科学基金会数学组第一任主席,国际数学教育委员会中心主席(1979—1982 年),美国《数学杂志》(American Journal of Mathematics)编辑(1944—1949 年),以及在国际数学界享有极高声誉的《数学评论》(Mathematical Review)的编辑(1949—1954 年)。20 世纪 60 年代开始,惠特尼的精力和兴趣转向数学教育,特别是小学和中学的数学课程教育。他担任了国际数学教育委员会中心主席(1979—1982 年)及美国、英国和比利时等多个国家的数学教学顾问。他深入到中小学教学一线,观察数学课程的教学情况,并亲自给学生讲授代数基础课程。他试图消除学生对数学的焦虑和厌学,倡导将数学教学与学生的生活相联系,反对学生用死记硬背的方式学习数学。1945 年,惠特尼当选美国国家科学院院士。同时,他还是英国伦敦数学会、瑞士数学会的荣誉会士,以及法国科学院外籍合作院士。1976 年,惠特尼被授予美国国家科学奖章。1982 年,他获得数学界的重要奖项——沃尔夫奖。1985 年,惠特尼又获得了美国数学会的斯蒂尔奖。

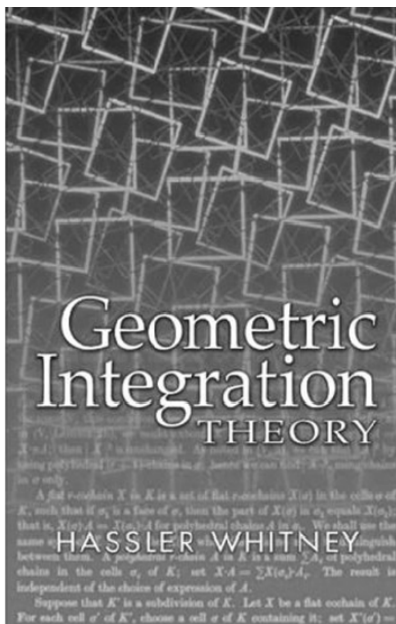


图 3.3.5 《几何积分论》

## 3.4 切向量与余切向量

本节将介绍流形的切向量和余切向量这两类重要对偶向量的概念和性质,并研究由它们生成的切空间和余切空间的结构,同时还将研究光滑流形间的诱导切映射和余切映射。

### 3.4.1 切向量与切空间

在  $R^3$  中,可用曲线在一点处切线的方向向量来引入切向量,而曲线的切线可看作割线的极限位置。但这种利用割线引入切向量的方式依赖于曲线的外围空间  $R^3$ 。对于流形  $M$  而言,希望采用摆脱外围空间束缚的方式来引入切向量的定义。

设  $M$  是光滑流形,  $p \in M$ 。若存在点  $p$  的一个邻域  $U$ ,使得函数  $f$  和  $g$  在  $U$  上的限制是相同的,即  $f|_U = g|_U$ ,则称函数  $f$  和  $g$  在点  $p$  是局部等价的。根据这一等价关系,可以将  $C_p^\infty$  中的函数分为等价类。每个在点  $p$  局部等价的函数构成的等价类称为流形  $M$  在点  $p$  处的一个光滑函数芽 (germ of smooth functions)。

**定义 3.4.1(切向量和切空间)** 设  $M$  为一个  $m$  维光滑流形,  $p \in M$ ,若映射  $X_p: C_p^\infty \rightarrow R$  满足:  $\forall f, g \in C_p^\infty, \lambda, \mu \in R$ , 有:

$$(1) \quad X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g) \quad (3.4.1)$$

$$(2) \quad X_p(f \cdot g) = g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g) \quad (3.4.2)$$

则称映射  $X_p$  为流形  $M$  在点  $p$  处的一个切向量 (tangent vector)。将流形  $M$  在点  $p$  处的所有切向量构成的集合记为  $T_p M$ ，称其为流形  $M$  在点  $p$  处的切空间 (tangent space)。

如图 3.4.1 所示，可在  $T_p M$  中引入加法和数乘运算： $\forall X_p, Y_p \in T_p M$ ， $\lambda \in R$ ， $f \in C_p^\infty$ ，令

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f) \quad (3.4.3)$$

$$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f) \quad (3.4.4)$$

易证： $X_p + Y_p$  和  $\lambda X_p$  满足定义 3.4.1 中的式 (3.4.1) 和式 (3.4.2)，所以， $X_p + Y_p$  和  $\lambda X_p \in T_p M$ 。因此， $T_p M$  是一个向量空间。

定义 3.4.1 是用映射的方式给出流形上的切向量定义的。式 (3.4.2) 说明  $X_p$  是一个导子，所以也可以将定义 3.4.1 中的切向量  $X_p$  理解成是一个算子。切向量作用于流形上的光滑函数，而且它对点  $p$  处属于同一个光滑函数芽的函数作用效果是一样的。换句话说，流形上属于同一个光滑函数芽的函数所对应的曲线在点  $p$  处具有相同的切向量。这样，就在切向量  $X_p$  与光滑函数芽之间建立了对应，如图 3.4.2 所示。

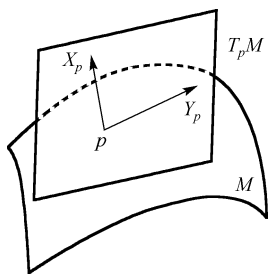


图 3.4.1 切空间

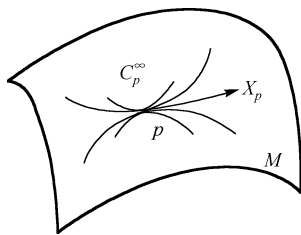


图 3.4.2 切向量  $X_p$  与光滑函数芽间的对应关系

下面来讨论光滑流形上的光滑曲线的切向量。

**【例 3.4.1】** 如图 3.4.3 所示，设  $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  是光滑流形  $M$  上的一条经过点  $r(0) = p$  的光滑曲线。对  $\forall f \in C_p^\infty$ ， $f \circ r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R$  是流形  $M$  在  $p$  点处的光滑函数。

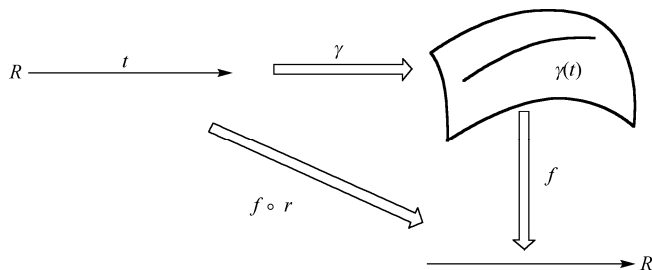


图 3.4.3 流形上的光滑曲线

所以，可以定义映射  $v: C_p^\infty \rightarrow R$  为：

$$v(f) = \left. \frac{d(f \circ r(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.4.5)$$

则  $v$  是流形  $M$  在点  $p$  处的一个切向量，也称  $v$  是流形  $M$  上的光滑曲线  $r(t)$  在点  $t = 0$  处的切向量。事实上，容易验证映射  $v$  满足式 (3.4.1) 的线性。同时，对  $\forall f, g \in C_p^\infty$ ，有：

$$\begin{aligned}
v(fg) &= \frac{d((f \cdot g) \circ r(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d((f \circ r(t)) \cdot (g \circ r(t)))}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= \left[ g \circ r(t) \frac{d(f \circ r(t))}{dt} + f \circ r(t) \frac{d(g \circ r(t))}{dt} \right] \Big|_{t=0} \\
&= g \circ r(0)v(f) + f \circ r(0)v(g) \\
&= g(p)v(f) + f(p)v(g)
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

即  $v$  满足式 (3.4.2)。

例 3.4.1 也给出了光滑流形上的光滑曲线的切向量定义。

下面来研究切空间的基底和维数。设  $(U, \varphi)$  为  $m$  维光滑流形  $M$  在点  $p$  处的一个容许坐标卡, 相应的局部坐标系为  $x^i$ , 即  $\forall q \in U$ , 点  $q$  的局部坐标为  $(x^1(q), \dots, x^m(q))$ , 其中  $x^i(q) = (\varphi(q))^i$ ,  $i=1, \dots, m$ 。又设点  $p$  的局部坐标为  $(x_p^1, \dots, x_p^m)$ 。对  $1 \leq j \leq m$ , 考虑流形  $M$  上的  $m$  条光滑曲线:  $r_j: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , 其上点  $(x^1(r_j(t)), \dots, x^m(r_j(t)))$  的坐标分量满足:

$$x^i(r_j(t)) = x_p^i + \delta_j^i t, \quad i=1, \dots, m \tag{3.4.7}$$

我们称  $r_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  为流形  $M$  的坐标曲线。

我们用  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  表示坐标曲线  $r_j$  在点  $t=0$  处的切向量。对  $\forall f \in C_p^\infty$ , 有:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^j}(f) &= \frac{d(f \circ r_j(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ \varphi^{-1}(x_p^1, \dots, x_p^j + t, \dots, x_p^m))}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(p)}
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

式 (3.4.8) 中涉及的映射复合关系如图 3.4.4 所示。

特别地, 有:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.4.9}$$

对  $\forall X_p \in T_p M$ , 首先根据切向量的线性可知, 对  $\forall \lambda \in R$ ,  $X_p(\lambda) = \lambda X_p(1) = 0$ , 所以切向量对常值函数的作用为 0。对  $\forall f \in C_p^\infty$ ,

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^m (x^i - x_p^i) g_i(x) \tag{3.4.10}$$

式中,  $g_i(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$ 。从而, 有:

$$\begin{aligned}
X_p(f) &= X_p \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^m (x^i - x_p^i) g_i(x) \right) = \sum_{i=1}^m X_p((x^i - x_p^i) g_i(x)) \\
&= \sum_{i=1}^m X_p(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

由  $f$  的任意性可知,  $X_p = \sum_{i=1}^m X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 即切向量  $X_p$  可被  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$  所表示。

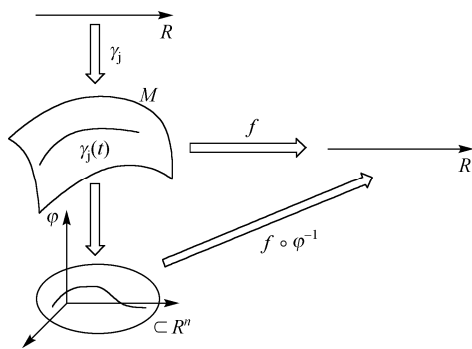


图 3.4.4 映射复合关系

其次, 在  $\sum_{i=1}^m k^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$  两边依次作用于  $x^j$ , 可得:  $k_j = 0, j = 1, \dots, m$ 。由此可知,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$

是线性无关的。

综上所述,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  为流形  $M$  在点  $p$  处切空间  $T_p M$  的一组基底, 称其为流形  $M$  在点  $p$

处切空间  $T_p M$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  下的自然基底 (或自然标架)。

同时, 由上述讨论可知, 流形在任一点处切空间的维数与流形的维数相同, 即有如下定理。

**定理 3.4.1** 设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形,  $\forall p \in M$ , 则  $\dim(T_p M) = m$ 。

**【例 3.4.2】** 求例 3.4.1 中光滑曲线  $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  为在光滑流形  $M$  的自然基底下的分量表示。

**解:** 光滑曲线  $r: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  在点  $p = r(0) \in M$  处的切向量为  $v = r'(0)$ 。对  $\forall f \in C_p^\infty$ , 有:

$$\begin{aligned} v(f) &= \left. \frac{d(f \circ r(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \varphi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{dx^i(t)}{dt} \bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{dx^i(0)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

由  $f$  的任意性可知, 光滑流形  $M$  上的光滑曲线的切向量在自然基底  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  下的分量表示:

$$v = \sum_{i=1}^m \frac{dx^i(0)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.4.13)$$

对  $T_p M$  中的任一个切向量  $v$ , 都可以构造一条通过  $p$  点并且在该点处以  $v$  为切向量的光滑曲线:  $r(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in M$ , 其中  $x^i(t) = x_0^i + v^i t$ 。事实上, 由例 3.4.2 可知:

$$r'(0) = \sum_i \frac{dx^i(0)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v \quad (3.4.14)$$

下面来考查切向量在局部坐标变换下的分量函数变换。对  $\forall p \in M$ ,  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^j)$

为包含点  $p$  的两个局部坐标系,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  和  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}_{j=1}^m$  为这两个局部坐标系对应的自然标架。根据

图 3.4.5 所示的映射复合关系图:

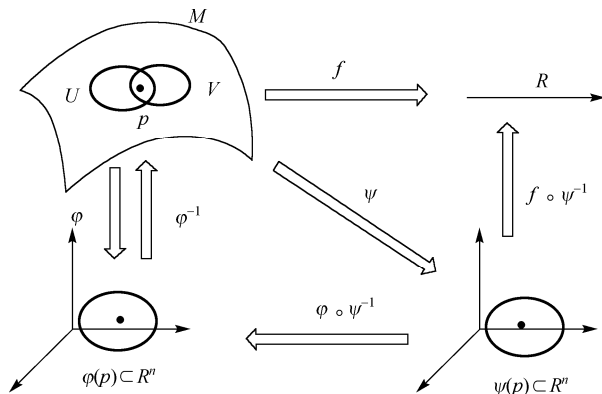


图 3.4.5 映射复合关系

有

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f}{\partial y^j} \right|_p &= \left. \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)} = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)} \\
 &= \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})^i} \right|_{\varphi(p)} \left. \frac{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})^i}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)} \\
 &= \sum_{i=1}^m \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)}
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.4.16}$$

其中函数  $x^i = (\varphi \circ \psi^{-1})^i: R^n \rightarrow R$ 。这样，对  $\forall v \in T_p M$ ，有：

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.4.17}$$

另一方面，成立

$$v = \sum_{j=1}^m \tilde{v}^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{i,j=1}^m \tilde{v}^j \left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.4.18}$$

利用式 (3.4.17) 和式 (3.4.18)，可得切向量在局部坐标系变换下的分量函数变换公式：

$$v^i = \sum_{j=1}^m \tilde{v}^j \left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_{\psi(p)} \tag{3.4.19}$$

### 3.4.2 余切向量和余切空间

余切向量是切向量的对偶向量，其严格定义如下。

**定义 3.4.2 (余切向量和余切空间)** 设  $M$  为  $m$  维光滑流形， $\forall p \in M$ ，称线性函数  $\alpha: T_p M \rightarrow R$  为光滑流形  $M$  在点  $p$  处的余切向量 (cotangent vector)。用  $T_p^* M$  表示流形  $M$  在点  $p$  处的余切向量构成的空间，称为光滑流形  $M$  在点  $p$  处的余切空间 (cotangent space)。

根据定义可知，切空间  $T_p M$  和余切空间  $T_p^* M$  互为对偶空间。所以：

$$\dim(T_p^* M) = \dim(T_p M) = \dim M$$

那么，哪些元素可以构成余切空间的基底呢？为了回答这个问题，我们先来给出流形上光滑函数微分的定义。

**定义 3.4.3 (流形上光滑函数的微分)** 设  $M$  为  $n$  维光滑流形， $\forall p \in M$ ，对  $f \in C_p^\infty$ ，定义  $f$  在流形  $M$  上的点  $p$  处的微分为：对  $\forall v \in T_p M$ ，有：

$$df(v) = \langle df, v \rangle = v(f) \tag{3.4.20}$$

易知， $df: T_p M \rightarrow R$ ，即  $df \in T_p^* M$ 。特别地，当  $f = x^i$  时， $dx^i(v) = v(x^i)$ 。进而，有：

$$\mathrm{d}x^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (3.4.21)$$

这也就说明了  $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^m$  为  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}_{j=1}^m$  的对偶基, 即  $\{\mathrm{d}x^i\}_{i=1}^m$  为  $T_p^*M$  的一组基底。这就给出了前述问题的答案。

下面利用切向量的分量表示来给出余切向量的分量表示。  $\forall \alpha \in T_p^*M$ ,  $v \in T_pM$ , 有:

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \alpha \left( \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{i=1}^m v^i \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m v(x^i) \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i(v) \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

根据切向量的任意性可知,

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathrm{d}x^i \quad (3.4.23)$$

特别地, 当  $\alpha = \mathrm{d}f$  时, 有:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^m f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \quad (3.4.24)$$

### 3.4.3 诱导切映射和诱导余切映射

考虑光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射:  $\varphi: M \rightarrow N$ ,  $p \mapsto \varphi(p)$ 。映射  $\varphi$  将流形  $M$  上的曲线  $r(t)$  映射为流形  $N$  上的曲线  $\varphi(r(t))$ , 曲线  $r(t)$  在点  $p$  处的切向量  $X_p$  映射为曲线  $\varphi(r(t))$  在点  $\varphi(p)$  处的切向量  $Y_{\varphi(p)}$ 。下面来考虑由光滑流形  $M$  和  $N$  间的映射  $\varphi$  所诱导的切空间  $T_pM$  和  $T_{\varphi(p)}N$  间的映射、余切空间  $T_{\varphi(p)}^*N$  和  $T_p^*M$  间的映射, 即诱导切映射 (tangent mapping) 和诱导余切映射 (cotangent mapping)。

**定义 3.4.4 (拉回映射)** 设  $M$  和  $N$  分别为  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射,  $\forall p \in M$ ,  $f \in C_p^\infty$ , 称映射:

$$\varphi^*: C_{\varphi(p)}^\infty \rightarrow C_p^\infty, \quad f \mapsto \varphi^*(f) = f \circ \varphi$$

为拉回映射 (pull back)。

利用拉回映射, 可以定义光滑流形的切空间之间的诱导切映射和余切空间之间的诱导余切映射。

**定义 3.4.5 (诱导切映射)** 设  $M$  和  $N$  分别为  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射,  $\forall p \in M$ ,  $f \in C_p^\infty$ ,  $X_p \in T_pM$ , 定义映射  $\varphi_*: T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  为:

$$(\varphi_*(X_p))(f) = X_p(\varphi^*f) = X_p(f \circ \varphi) \quad (3.4.25)$$

称  $\varphi_*$  为光滑映射  $\varphi$  在点  $p \in M$  处所诱导的切映射。

利用定义不难验证切映射是线性映射, 即:

$$\varphi_*(X_p + Y_p) = \varphi_*(X_p) + \varphi_*(Y_p), \quad \forall X_p, Y_p \in T_pM$$



同时, 设  $M$ 、 $N$  和  $L$  是光滑流形, 光滑映射  $\varphi: M \rightarrow N$  和  $\psi: N \rightarrow L$  的复合映射的诱导切映射  $(\psi \circ \varphi)_*$  等于诱导切映射  $\varphi_*$  和  $\psi_*$  的复合映射  $\psi_* \circ \varphi_*$ , 即:

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \quad (3.4.26)$$

**定义 3.4.6 (诱导余切映射)** 设  $M$  和  $N$  分别为  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射,  $\forall p \in M$ ,  $\alpha \in T_{\varphi(p)}^*N$ ,  $X_p \in T_pM$ , 定义映射  $\varphi^*: T_{\varphi(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$  为:

$$(\varphi^*\alpha)(X_p) = \alpha(\varphi_*(X_p)) \quad (3.4.27)$$

下面来研究切映射和余切映射对切空间和余切空间基底的作用。设  $\varphi: M \rightarrow N$  为  $m$  维光滑流形  $M$  和  $n$  维光滑流形  $N$  间的光滑映射,  $\forall p \in M$ 。设  $(U; x^i)$  为流形  $M$  在点  $p$  处的局部坐标系,  $(V; y^\alpha)$  为流形  $N$  在点  $\varphi(p)$  处的局部坐标系。

因为  $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in T_{\varphi(p)}N$ , 所以可设:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^n A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad (3.4.28)$$

两边都是流形  $N$  上的切向量, 可同时作用于坐标函数  $y^\beta$ , 有:

$$\begin{aligned} A_i^\beta &= \left( \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \right) (y^\beta) = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (\varphi^*(y^\beta)) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (y^\beta \circ \varphi) = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

代入式 (3.4.28), 得到了流形  $N$  上的切向量  $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$  的分量表达式:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad (3.4.30)$$

同时, 利用切向量  $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$  的分量表达式, 可以得到流形  $M$  上的余切向量  $\varphi^*(dy^\alpha)$  的分量表达式:

$$\begin{aligned} \varphi^*(dy^\alpha) &= \sum_{i=1}^m \varphi^*(dy^\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i = \sum_{i=1}^m dy^\alpha \left( \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \right) dx^i \\ &= \sum_{i=1}^m dy^\alpha \left( \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) dx^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} dx^i \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

设  $\varphi: M \rightarrow N$  和  $\psi: N \rightarrow L$  是光滑流形间的光滑映射, 则可以证明它们的复合映射的诱导余切映射  $(\psi \circ \varphi)^*$  等于诱导余切映射  $\psi^*$  和  $\varphi^*$  的复合映射  $\varphi^* \circ \psi^*$ , 即:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad (3.4.32)$$

光滑流形间的光滑映射诱导的切映射建立了不同流形间的切向量的对应, 诱导的余切映射建立了流形间的余切向量的对应。换句话说, 可以利用诱导切映射和诱导余切映射在流形间“搬运”切向量和余切向量。它们为子流形、李导数等概念的引入奠定了基础。

**【例 3.4.3】** 设光滑映射  $f: R^2 \rightarrow R^3$ ,  $(x, y) \rightarrow (u, v, w)$  的定义为:

$$f(x, y) = (x^2, xy, 2x + y)$$

$\omega = vdu + u dv - w dw$ , 求  $f^* \omega$ 。

解: 根据题意有

$$u = x^2, \quad v = xy, \quad w = 2x + y$$

所以

$$f^* du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2x dx \quad (3.4.33)$$

$$f^* dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = y dx + x dy \quad (3.4.34)$$

$$f^* dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = 2 dx + dy \quad (3.4.35)$$

这样, 利用式 (3.4.33) ~ 式 (3.4.35), 有:

$$\begin{aligned} f^* \omega &= xy \cdot 2x dx + x^3 y (y dx + x dy) - (2x + y)(2 dx + dy) \\ &= (2x^2 y + x^3 y^2 - 4x - 2y) dx + (x^4 y - 2x - y) dy \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

## 3.5 子流形和带边流形

在古典微分几何中, 我们自然地将曲线和曲面等几何对象看成是三维欧氏空间的“附属物”, 即把曲线和曲面这两类特殊的流形放在高维的欧氏空间中加以研究。这种思想方法也可以推广应用到其他流形的研究中, 这就是子流形。本节将引入浸入子流形、嵌入子流形、开子流形、闭子流形等子流形概念。同时, 还将研究带边流形和闭流形。

### 3.5.1 浸入与嵌入

**定义 3.5.1 (光滑映射的秩)** 设  $\varphi$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射, 对  $\forall x_0 \in M$ ,  $\varphi$  在  $x_0$  处的诱导切映射为:  $\varphi_{*x_0}: T_{x_0} M \rightarrow T_{\varphi(x_0)} N$ , 称诱导切映射的像空间  $\varphi_{*x_0}(T_{x_0} M)$  的维数为  $\varphi$  在  $x_0$  处的秩 (rank), 即:

$$\text{rank}_{x_0}(\varphi) = \dim(\varphi_{*x_0}(T_{x_0} M)) \quad (3.5.1)$$

对  $\forall x_0 \in M$ , 设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  分别为光滑流形  $M$  和  $N$  在点  $x_0$  和点  $\varphi(x_0)$  处的局部坐标系, 则诱导余切映射  $\varphi_{*x_0}: T_{x_0} M \rightarrow T_{\varphi(x_0)} N$  将  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  映射为:

$$\varphi_{*x_0} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \bigg|_{x_0} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad (3.5.2)$$

所以, 有:

$$\text{rank}_{x_0}(\varphi) = \text{rank} \left( \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \bigg|_{x_0} \right)$$

**定义 3.5.2 (非退化的切映射)** 设  $\varphi$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射,  $\forall x_0 \in M$ ,  $\varphi_{*x_0}$ :

$T_{x_0}M \rightarrow T_{\varphi(x_0)}N$  为  $\varphi$  在  $x_0$  处的诱导切映射, 若对任意的非零切向量  $v \in T_{x_0}M$ , 有  $\varphi_{*x_0}(v) \neq 0$ , 则称切映射  $\varphi_*$  在  $x_0 \in M$  处是非退化的 (non-degenerate)。

事实上, 若  $\varphi_{*x_0}$  为单射, 则:

$$\dim(\varphi_*(T_{x_0}M)) = \dim(T_{x_0}M) = \dim M \quad (3.5.3)$$

**定义 3.5.3 (浸入和淹没)** 设  $M$  和  $N$  分别是  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  为流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射。若映射  $\varphi$  在  $x_0 \in M$  处的秩  $\text{rank}_{x_0}(\varphi) = m$ , 则称映射  $\varphi$  在点  $x_0 \in M$  处为浸入 (immersion)。若  $\varphi$  在流形  $M$  上的任一点处都是浸入, 则称  $M$  为  $N$  的浸入子流形。若  $\varphi$  在  $x_0 \in M$  处的秩  $\text{rank}_{x_0}(\varphi) = n$ , 则称  $\varphi$  在点  $x_0 \in M$  处是淹没 (submersion)。若  $\varphi$  在流形  $M$  上的任一点处都是淹没, 则称  $\varphi$  是淹没映射。

因为  $\text{rank}_{x_0}(\varphi) \leq \min(m, n)$ , 所以有: 如果  $\varphi$  为浸入, 则  $m \leq n$ ; 如果  $\varphi$  为淹没, 则  $n \leq m$ 。

**定义 3.5.4 (嵌入)** 设  $M$  和  $N$  分别为  $m$  维和  $n$  维光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  为流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射。若映射  $\varphi$  满足:

- (1)  $\varphi$  是浸入;
- (2)  $\varphi$  是单一的;
- (3)  $\varphi: M \rightarrow \varphi(M)$  是同胚;

则称  $\varphi$  是嵌入 (embedding), 称  $(M, \varphi)$  为  $N$  的嵌入子流形。常把  $M$  和  $\varphi(M)$  等同起来, 并直接称  $M$  为  $N$  的光滑子流形, 简称为子流形 (submanifold); 称  $N$  为  $M$  的外围流形 (ambient manifold)。

**【例 3.5.1】** 设映射  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  为:

$$f(t) = \left( 2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \right) \quad (3.5.4)$$

绘制该曲线的图形, 并说明映射  $f$  是浸入, 但不是嵌入。

**解:** 这是  $\mathbb{R}^2$  中的一条曲线。该曲线的图像具有对称性, 关于  $x$  轴和  $y$  轴都对称。

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2, 0)$ ,  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-2, 0)$ 。当  $t = 0$ 、 $t = \pi$  和  $t = 2\pi$  时, 对应点为  $(0, 0)$ 。

有两种方式使用 MATLAB 绘制出该曲线的图像。利用该曲线的参数方程画图的 MATLAB 程序代码如下:

```
%利用参数方程画图
t=-2*pi:0.01:2*pi;
x=2*cos(t-pi/2);
y=sin(2*(t-pi/2));
plot(x,y);
hold on
plot(2,0,'.')    % 画右端点
plot(-2,0,'.')   % 画左端点
plot(sqrt(2),-1,'.') % 画 A 点
hold off
```

另外, 该曲线在直角坐标系下的方程为:  $4y^2 + x^4 - 4x^2 = 0$ 。利用直角坐标方程画图的 MATLAB 程序代码如下:

```

%利用直角坐标方程画图
ezplot('4*y^2+x^4-4*x^2',[-2.5 2.5])
hold on
plot(2,0,'.')      % 画右端点
plot(-2,0,'.')     % 画左端点
plot(sqrt(2), -1, '.') % 画 A 点
hold off

```

MATLAB 绘制出的图像如图 3.5.1 所示。

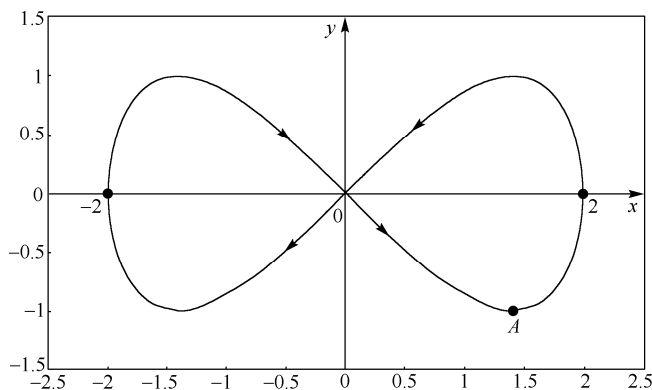


图 3.5.1 例 3.5.1 MATLAB 绘制的图像

映射  $f$  的诱导切映射为:

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} = \left(-2 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), 2 \cos 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (3.5.5)$$

所以,  $f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  是处处非零的, 即非退化的。因此, 映射  $f$  是浸入。但  $f$  有自交点  $f(\pi) = f(2\pi) = (0, 0)$ , 故映射  $f$  不是单一的, 所以映射  $f$  不是嵌入。

【例 3.5.2】 设映射  $g: R \rightarrow R^2$  为:

$$g(t) = \left(2 \cos\left(2 \arctan t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(2 \arctan t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (3.5.6)$$

绘制该曲线的图形, 并说明映射  $f$  是嵌入。

解: 利用 MATLAB 程序画图的代码如下:

```

% ezplot('4*y^2+x^4-4*x^2',[-2.5 2.5]) % 直角坐标方程
t=-2*pi:0.01:2*pi;
x=2*cos(t-pi/2);
y=sin(2*(t-pi/2));
plot(x,y);      % 参数方程
hold on
plot(2,0,'.')   % 画右端点
plot(-2,0,'.')  % 画左端点
plot(sqrt(2), -1, '.') % 画 A 点
hold off

```

MATLAB 绘制出的图像如图 3.5.2 所示。

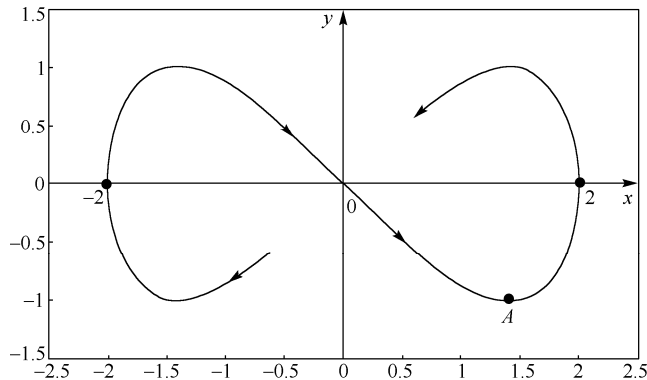


图 3.5.2 例 3.5.2 MATLAB 绘制的图像 1

注意到图 3.5.2 的绘制效果不尽如人意，因此需要重新调整参数  $t$  的范围再次画图。将上述程序代码中的  $t$  的范围改为：

```
% 改变 t 的范围再画图
t=-100*pi:0.01:100*pi;
```

改变参数  $t$  的范围后，MATLAB 绘制出的图像如图 3.5.3 所示。

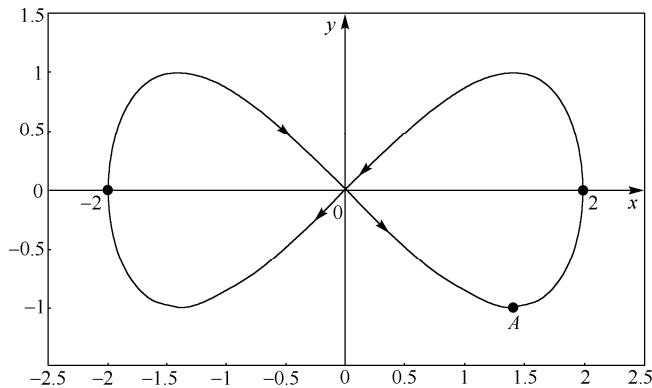


图 3.5.3 例 3.5.2 MATLAB 绘制的图像 2

验证可知，映射  $g$  是同胚，单一的，浸入映射。所以，映射  $g$  是嵌入。

### 3.5.2 开子流形和闭子流形

**定义 3.5.5 (开子流形)** 若  $M$  为  $N$  的开子集，嵌入映射为恒等映射  $id$ 。  $M$  上的拓扑是它作为  $N$  的子空间获得的拓扑：用  $N$  的坐标卡  $(V; y^i)$  可得  $M$  的一个坐标卡  $(V \cap M; y^i)$ 。称  $M$  为  $N$  的开子流形 (open submanifold)。

需要指出的是，一个嵌入子流形不一定是外围流形的开子流形。同时，当  $M$  为  $N$  的嵌入子流形时，将  $M$  上的拓扑移植到  $\varphi(M)$  上， $\varphi(M)$  关于该拓扑称为一个拓扑空间。但是， $\varphi(M)$  由  $M$  移植而来的拓扑与  $\varphi(M)$  从  $N$  诱导所得的拓扑不一定相符。所以，尽管  $\varphi(M)$  是  $N$  的一个子集，但  $\varphi(M)$  不一定是  $N$  的拓扑子空间。

**定义 3.5.6 (闭子流形)** 设  $(M, \varphi)$  是  $n$  维光滑流形  $N$  的一个  $m$  维嵌入子流形，并且满足：

(1)  $\varphi(M)$  是  $N$  的闭子集;

(2) 对  $\forall q \in M$ , 存在  $N$  的一个坐标卡  $(V; y^i)$ , 使得  $q \in V$ , 并且  $\varphi(M) \cap V$  是由方程  $y^{m+1} = \dots = y^n = 0$  定义的。

称  $\varphi(M)$  是  $N$  的一个闭子流形 (closed submanifold)。

**【例 3.5.3】** 球面  $S^n(r) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = r^2\}$  是  $R^{n+1}$  的一个闭子流形。首先,  $S^n(r)$  是  $R^{n+1}$  的一个闭子集。其次,  $id$  是一个单射。对  $\forall p \in S^n(r)$ , 易知至少有一个坐标  $x^j \neq 0$ , 不妨设  $x^j > 0$ 。点  $p$  属于开集:

$$V_j = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid x^j > 0, \sum_{i \neq j} (x^i)^2 < r^2 \right\}$$

此时对  $i \neq j$ , 令  $y^i = x^i$ ; 令

$$y^j = x^j - \sqrt{r^2 - \sum_{i \neq j} (x^i)^2} \quad (3.5.7)$$

对  $x^j < 0$ , 可令

$$y^j = x^j + \sqrt{r^2 - \sum_{i \neq j} (x^i)^2} \quad (3.5.8)$$

这样, 可用  $(y^1, \dots, y^{n+1})$  作为开集  $V_j$  的坐标函数, 而  $S^n(r) \cap V_j$  可用  $y^j = 0$  来表示, 所以,  $S^n(r)$  是  $R^{n+1}$  的一个闭子流形。

### 3.5.3 嵌入定理

子流形的概念是古典微分几何将曲线和曲面放在欧氏空间中加以处理这一方法的抽象和推广, 而且能在欧氏空间中构造许多嵌入子流形作为光滑流形的特例。那么, 一个自然的问题: 是不是每个可微流形都可看作是欧氏空间的嵌入子流形? 美国数学家惠特尼 (H. Whitney, 1907—1989 年) 在 1936 年证明了如下著名的定理。

**定理 3.5.1 (惠特尼嵌入定理)** 设  $M$  是  $m$  维的  $C^r$  微分流形 ( $1 \leq r \leq \infty$ ), 则存在一个  $C^r$  微分映射  $\varphi: M \rightarrow R^{2m}$ , 使得:  $(M, \varphi)$  是  $R^{2m}$  的浸入子流形, 并且  $\varphi(M)$  是  $R^{2m}$  的闭子集; 存在单的  $C^r$  微分映射  $\psi: M \rightarrow R^{2m+1}$ , 使得:  $(M, \psi)$  是  $R^{2m+1}$  的浸入子流形, 并且  $\psi(M)$  是  $R^{2m+1}$  的闭子集。

1944 年, 惠特尼又进一步证明了  $M$  可以浸入于  $R^{2m-1}$  中,  $M$  可以嵌入于  $R^{2m}$  中。而且, 确实存在着不能嵌入到  $R^{2m}$  中的  $m$  维流形。所以, 上述问题有了明确的答案。定理的证明较为复杂, 参见惠特尼的《几何积分论》(Geometric integration theory) 或张筑生的《微分拓扑讲义》。

对黎曼流形 (参见 5.2 节), 美国数学家纳什 (J. Nash, 1928 年—) 证明了纳什嵌入定理:  $m$  维黎曼流形  $M$  可以等距地嵌入 (或浸入) 到  $R^n$  中。定理包括几个版本。  $C^1$  嵌入 (或浸入) 发表于 1954 年:  $n \geq m+1$ 。对  $3 \leq r \leq \infty$ ,  $C^r$  嵌入 (或浸入) 发表于 1956 年: 若  $M$  是紧致的, 则  $n \leq \frac{m(3m+11)}{2}$ ; 若  $M$  是非紧的, 则  $n \leq \frac{m(m+1)(3m+11)}{2}$ 。

值得指出的是, 惠特尼和纳什的嵌入定理可以帮助我们将微分流形、黎曼流形的研究变为欧氏空间的子流形的研究。但是在一般情形下, 用抽象、内蕴的观点来处理微分流形、黎曼流形已被事实证明具有更大的优越性, 它具有更多概念和技术上的优点。

### 3.5.4 带边流形和闭流形

我们知道  $x$  轴上的点  $\{(x, y) \in R^2 \mid y = 0\}$  是上半平面  $\{(x, y) \in R^2 \mid y \geq 0\}$  的边界点。据此推广，称：

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in R^n \mid x^n \geq 0\}$$

为  $R^n$  的半空间，其上的拓扑可以由  $R^n$  的拓扑诱导获得。集合：

$$\partial H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in R^n \mid x^n = 0\}$$

是由  $H^n$  的边界点构成的集合，称为  $H^n$  的边界。例如， $H^2$  如图 3.5.4 所示。

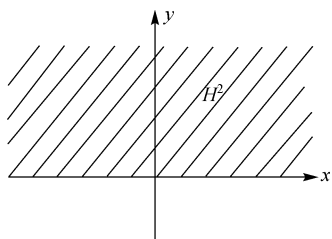


图 3.5.4  $H^2$

**定义 3.5.7 (带边流形)** 设  $M$  为一个豪斯多夫空间，若存在  $M$  的一族开子集  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  和一族从  $U_\alpha$  到  $H^n$  的开子集的同胚  $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ，并且  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$  满足如下条件：

(1)  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  构成流形  $M$  的一个开覆盖；

(2) 属于  $A$  的任意两个坐标卡是  $C^\infty$  相关的，即：对  $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in A$ ，当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时，映射：

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset H^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset H^n$$

和

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset H^n \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset H^n$$

是光滑同胚；

(3)  $A$  是极大的，即若  $(U, \varphi)$  是  $M$  的一个坐标卡，且  $(U, \varphi)$  与  $A$  的每个成员都是  $C^\infty$ -相关的，则  $(U, \varphi)$  属于  $A$ ；则称  $M$  是一个带边的光滑流形 (smooth manifold with boundary)。设  $p \in M$ ，若存在  $(U, \varphi) \in A$ ，使得  $\varphi(p) \in \partial H^n$ ，则称点  $p$  是流形  $M$  的边界点 (boundary point)。所有边界点构成的集合称为流形  $M$  的边界 (boundary)，记为  $\partial M$ 。若  $\partial M = \emptyset$ ，则称  $M$  是无边流形 (manifold without boundary)。紧致无边的流形称为闭流形 (closed manifold)。

根据紧性，闭流形是有限个连通闭流形的不相交并集 (disjoint union)。

**【例 3.5.4】** 单位圆周  $S^1$  是一维的闭流形。因为  $R$  不是紧致的，所以  $R$  不是闭流形。一维环面  $T^2$  和克莱因瓶也是闭流形。平面上单位圆盘：

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

是紧致的二维流形，但它是有边界的，所以也不是闭流形。注意到单位圆盘  $D$  是  $R^2$  的闭集，所以单位圆盘的例子也告诉我们，不能将闭流形与闭集混同起来。

## 附录 3.5 纳什生平及学术贡献

约翰·纳什 (John Nash, 1928 年—) (图 3.5.5)，美国数学家，主要研究博弈论、微分几何学和偏微分方程，于 1994 年获诺贝尔经济学奖。

小学时，纳什包括数学成绩在内的学习成绩并不好。他被老师认为是一个学习成绩低于

平均水平的学生。但纳什常常在数学解题过程中另辟蹊径，提供一些非常规的解法。这可能就是纳什具有异于常人数学天分的早期表现。在高中的最后一年，他在布鲁菲尔德专科学校选修了数学。

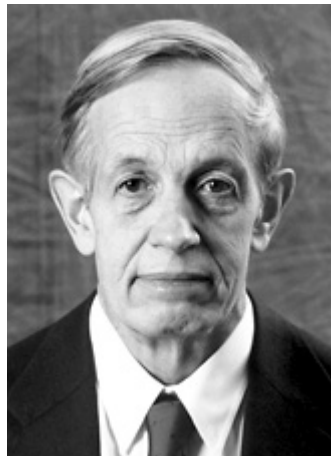


图 3.5.5 纳什

1945 年 6 月，纳什进入卡耐基梅隆大学学习化学工程专业，但他后来渐渐对数学产生了浓厚的兴趣。1948 年，大学三年级的纳什同时收到哈佛大学、普林斯顿大学、芝加哥大学和密执安大学的四份录取通知。1948 年，在他申请普林斯顿大学的推荐信上，他的指导教授只写了一句话：“此人是个天才。”1950 年，在他 22 岁时，他获得了普林斯顿大学的博士学位。在他所做的仅有 28 页的博士论文中，纳什提出了一个重要的概念——纳什均衡 (Nash equilibrium)。这一概念在非合作博弈理论中起着核心作用。纳什凭借他的博士论文和后续两篇文章而一举成为博弈论 (Game theory) 大师。博弈论是研究具有竞争和对抗性质的博弈行为中的斗争各方如何找到有利于自身的行为方案。作为

运筹学的重要分支，博弈论在生物学、经济学、军事战略、国际关系和计算机科学等方面具有广泛的应用。博弈论现代理论初步形成的标志是冯·诺伊曼 (J. V. Neumann, 1903—1957 年) 和摩根斯特恩 (O. Morgenstern, 1902—1977 年) 在 1944 年合著的《博弈论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior) 的出版。而纳什利用不动点定理 (Brouwer's fixed-point theorem) 证明了均衡点的存在，为博弈论的一般化奠定了坚实的基础。

博士毕业后，他曾在美国著名的军事战略研究机构——兰德公司短暂工作。1950 年秋天，他回到普林斯顿大学，开始研究流形和代数簇。1952 年，他开始了在麻省理工学院的教书生涯。但他的教学方式和考试方法都有悖于传统。这期间，他解决了微分几何中的一个重要公开问题，获得了著名的纳什嵌入定理。同时，他在代数簇 (algebraic variety) 和方程研究领域也获得了一些突破性的成果。1956—1957 年，他在普林斯顿高等研究所做研究员。1958 年，因为方程方面的工作，他差一点获得数学领域的重要奖项——菲尔兹奖。

但非常令人惋惜的是，纳什在 1958 年患上了妄想性精神分裂症。纳什在 2002 年接受采访时表示：如果他在患病前所做的工作能被认可的话，可能就会改变他的人生。不开心和困难可能会导致患病，而这就会改变一个人的人生。除了纳什完成的部分工作与他人重复、奖项的失之交臂让他大受打击之外，有专家分析，纳什的性格和为人处世的方式可能也是导致他患病的原因之一：纳什被人们称为“孤独的天才”，他喜欢独来独往、喜欢沉浸在自己的精神世界里、喜欢解决那些让人抓狂的数学问题。纳什的遭遇并不是特例：现代集合论的创始人康托尔 (G. F. L. P. Cantor, 1845—1918 年) 就由于其研究成果得不到认可、并受到众多数学家的长期攻击而精神失常。但幸运的是：在纳什患病后，纳什得到了他的前妻艾莉西亚的精心照顾和关爱；在纳什患病之后，普林斯顿大学仍然给他提供研究室，容许他自由地出入大学的图书馆。在此后的很长的一段时间里，沉浸在自己世界中的纳什成为普林斯顿大学校园里的一道风景：虽然行为古怪，但他仍然可以像一个正常学者那样自由地进行自己感兴趣的数学研究。在他患病的二十多年后，他奇迹般地康复了。1994 年，他和另外两位博弈论学家共同获得了诺贝尔经济学奖。

2001 年，纳什的生平故事被美国好莱坞拍摄成电影《美丽心灵》(A Beautiful Mind)。剧中的纳什由著名男星罗素·克劳 (R. I. Crowe, 1964 年—) 主演，该片获得奥斯卡金像奖。



这部影片主要刻画了纳什在普林斯顿教书和研究生涯、疯癫直至康复的传奇经历，用艺术的方式再现了天才数学家的天分和对数学研究的执着。尽管有艺术的成分，但我们仍可从这部影片窥探一个天才数学家的迷人精神世界。影片展现的纳什传奇人生亦令人深思：异于常人的天赋和优秀的研究成果给这个天才数学家带来自信，也让他渴求获得同行和世人的肯定与关注。但命运却给他开个不小的玩笑，让他感受世事有时的不公和大喜大悲。如果心态足够坚强，那么他就会看淡身外的浮华，专注于自己所爱之事。而时间终究会给他以公正的评价。这部影片还再现了纳什的妻子艾莉西亚的坚韧和对他多年长情的陪伴和坚守：在和纳什离婚后，她仍然不离不弃地照顾患病的他二十多年直至康复。也许正是艾莉西亚用真挚的爱和长久的坚守带领纳什与天意弄人的命运博弈，这才将纳什从疯癫中唤醒。在与命运的博弈中，他们最终取得了胜利。

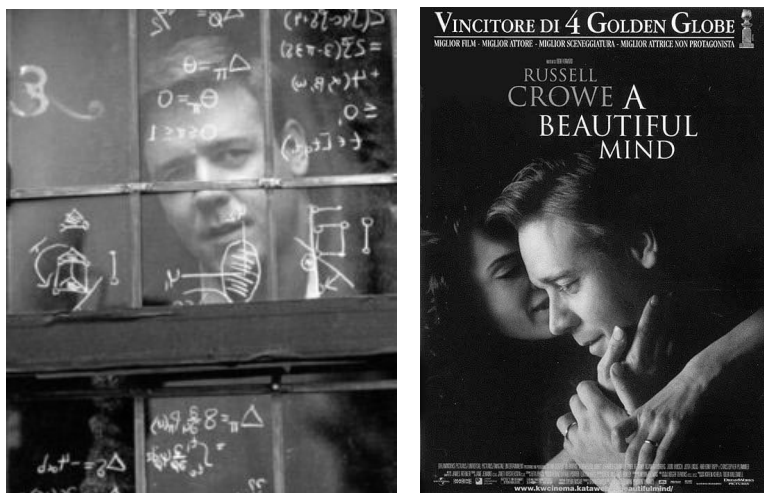


图 3.5.6 电影《美丽心灵》

2002 年，纳什来到北京，参加了在北京举行的国际数学家大会。纳什做了题为《通过代理来研究博弈中的合作》的一小时报告。在新闻媒体撰写的报道中有这样一句话：“纳什演讲结束后，他的妻子艾莉西亚走上讲台，和他一起接受听众送上的鲜花。然后，相携匆匆而去，只留给迎上前去的中外‘追星族’们一对美丽的背影。”

### 习 题 3

1. 设  $(X, \tau)$  是一个拓扑空间， $Y$  是  $X$  的子集，证明：

$$\tau|_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

是  $Y$  的一个拓扑。

2. 证明：度量拓扑空间是豪斯多夫空间。
3. 设  $f$  为紧致空间  $X$  到任意空间  $Y$  的连续映射，证明  $Y$  是紧致空间。
4. 定义分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

证明:  $f$  是连续映射, 但不是同胚。

5. 证明: 二维球面  $S^2$  不和  $R^2$  的任何子空间同胚。

6. 证明: 开圆盘  $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 、开正方形  $\{(x, y) \in R^2 \mid |x| < 1, |y| < 1\}$  都和  $R^2$  同胚。

7. 证明: 立方体

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

和球

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \leq 1 \right\}$$

同胚。

8. 证明: 上半球面

$$\left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1, x_{n+1} \geq 0 \right\}$$

和球

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \leq 1 \right\}$$

同胚。

9. 证明:  $R^3$  中的环面  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ , ( $a < b$ ) 是一个二维的光滑流形。

10. 点  $p = (0, \dots, 0, 1) \in R^{n+1}$  和  $q = (0, \dots, 0, -1) \in R^{n+1}$  称为  $n$  维单位球面:

$$S^n = \left\{ x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2} = 1 \right\}$$

的北极点和南极点。令  $U = S^n \setminus \{p\}$ ,  $V = S^n \setminus \{q\}$ , 按例 3.1.4 的方式建立的球极投影  $\varphi: U \rightarrow R^n$  和  $\psi: V \rightarrow R^n$  分别为:

$$\varphi(x) = \left( \frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}} \right)$$

和

$$\psi(x) = \left( \frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}} \right)$$

证明:  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  是  $S^n$  的一个光滑结构, 并且它与例 3.2.5 中的光滑结构是微分同胚的。

11. 在  $R^{n+1} \setminus \{0\}$  中定义等价关系  $\sim$ : 对  $\forall u, v \in R^{n+1} \setminus \{0\}$ ,  $u \sim v$  当且仅当存在非零实数  $\lambda$ , 使得  $u = \lambda v$ 。称  $R^{n+1} \setminus \{0\}$  在上述等价关系下的等价类集合  $RP^n = R^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  为实射影空间。证明: 实射影空间  $RP^n$  是  $n$  维光滑流形。

12. 求映射  $f: R^2 \rightarrow R^2$ ,  $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$  的诱导切映射。

13. 设映射  $f: R^2 \rightarrow R^2$  的定义为:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2$$

证明:  $f$  是光滑同胚, 并求诱导切映射  $f_*$  和诱导余切映射  $f^*$  在自然标架场下的矩阵。

14. 设  $M$ 、 $N$  和  $L$  是三个光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  和  $\psi: N \rightarrow L$  是光滑映射, 证明诱导切映射和诱导余切映射满足:

$$(1) \quad (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*;$$

$$(2) (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* .$$

15. 设映射  $f: R^2 \rightarrow R^3$  和  $g: R^3 \rightarrow R^2$  的定义为:

$$f(x) = (e^{2x_1+x_2}, 3x_2 - \cos x_1, x_1^2 + x_2 + 2), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in R^2$$

$$g(y) = (3y_1 + 2y_2 + y_3^2, y_1^2 - y_3 + 1), \quad \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$$

令  $F = g \circ f$ ,  $G = f \circ g$ , 求  $F_{*0}$  和  $G_{*0}$ 。

16. 设  $M$  和  $N$  是光滑流形,  $\varphi: M \rightarrow N$  是淹没, 证明:  $\varphi: M \rightarrow N$  是开映射。

# 切向量场、单参数变换群与切丛

这篇演讲表明大范围微分几何的新时代开始了。这个新时代以纤维丛的拓扑理论和嘉当外微分方法的综合为特征。

——霍普夫

纤维的德文“Faser”一词最早由德国数学家沙爱福(H. K. J. Seifert, 1907—1996年)在1932年所使用。1935年,美国数学家惠特尼(H. Whitney, 1907—1989年)在球面上引进了被他称为“球空间”的纤维空间,将其用于研究实向量丛的重要拓扑不变量——施蒂费尔-惠特尼示性类(Stiefel-Whitney class)。1940年,他将其改称为“球丛”。该示性类是由他和瑞士数学家施蒂费尔(E. Stiefel, 1909—1978年)分别于1936年和1935年各自独立建立的。20世纪40至50年代,纤维丛成为研究许多拓扑问题的主要工具,如同伦、同调及微分几何相关问题。法国数学家嘉当和他的学生埃雷斯曼(C. Ehresmann, 1905—1979年)等对纤维丛理论的发展也做出了重要贡献。嘉当在1949年、1950年的讨论班上就以纤维丛为专题系统地进行了讨论。1945年,陈省身在美国数学会大会上作题为《大范围微分几何若干新观点》的报告,阐述了整体微分几何的新思想和新方法。对纤维丛理论发展亦做出重要贡献的、并曾担任国际数学联盟主席的著名德国数学家霍普夫(H. Hopf, 1894—1971年)对这个报告的评价是:“这篇演讲表明大范围微分几何的新时代开始了。这个新时代以纤维丛的拓扑理论和嘉当外微分方法的综合为特征。”1951年,斯廷罗德(N. E. Steenrod, 1910—1971年)的专著《纤维丛的拓扑学》(*Topology of fiber bundles*)的出版,标志着纤维丛理论的成熟。纤维丛是将拓扑的理论和方法应用于其他数学分支和其他学科领域的一座桥梁。例如,纤维丛的联络理论是研究物理学规范场论的数学工具。向量丛是纤维为向量空间的特殊纤维丛,而向量丛的主要实例就是流形的切丛和余切丛。

本章将建立切向量场、单参数变换群和向量丛的概念,并研究光滑切向量场的泊松括号积、微分流形上对合的分布、李导数和切丛的结构等问题。

## 4.1 切向量场和泊松括号积

本节先给出光滑流形上的光滑切向量场的定义,然后研究光滑向量场间的一种重要运算——泊松括号积,最后讨论微分流形上对合的分布、诱导切映射与泊松括号积运算的可交换性。

### 4.1.1 切向量场

**定义 4.1.1(切向量场)** 设  $M$  为光滑流形,  $\forall p \in M$ ,  $TM = \bigcup_p T_p M$ , 定义映射  $X: M \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto X(p) \in T_p M$ , 称  $X$  为流形  $M$  上的一个切向量场 (tangent vector field)。

粗略地说, 切向量场就是在流形  $M$  的每点  $p$  处指定了切空间  $T_p M$  中的一个切向量, 如图 4.1.1 所示。从后面要介绍的丛的观点来看, 场是丛的截面。所以, 切向量场是切丛  $TM$  的截面。将在 4.3 节中详细讨论这一点。

下面定义切向量场的可微性。

**定义 4.1.2 ( $C^r$  切向量场)** 设  $(U; x^i)$  为光滑流形  $M$  在  $p \in M$  处的局部坐标系, 则切向量场  $X$  在  $U$  上的限制  $X|_U$  可用

自然基底  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  线性表出:  $X|_U = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 。若分量  $X^i$  在流形

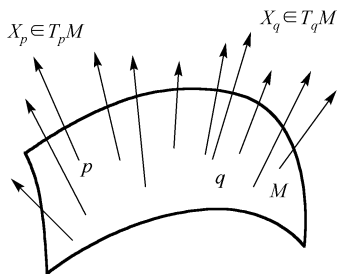


图 4.1.1 切向量场

$M$  上的点  $p$  处是  $C^r$  的, 则称切向量场  $X$  在点  $p$  处是  $C^r$  的。若切向量场  $X$  在光滑流形  $M$  上的任一点处都是  $C^r$  的, 则称  $X$  是光滑流形  $M$  上的  $C^r$  切向量场。若连续切向量场  $X$  在点  $p$  处满足  $X(p) = 0$ , 则称点  $p$  为切向量场  $X$  的奇点 (singular point)。

特别地, 称光滑流形  $M$  上的  $C^\infty$  切向量场是流形  $M$  上的光滑切向量场。用  $X(M)$  表示光滑流形  $M$  上的所有光滑切向量场所构成的集合。

$X(M)$  是  $R$  上的一个向量空间。事实上, 对光滑流形  $M$  上的任一点  $p$  和光滑切向量场  $X \in X(M)$ ,  $X(p) \in T_p(M)$ , 可在  $X(M)$  中引入加法、数乘和  $C^\infty(M)$ -乘法运算, 定义如下:

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p) \in T_p M \quad (4.1.1)$$

$$(\lambda X)(p) = \lambda X(p) \quad (4.1.2)$$

$$(fX)(p) = f(p)X(p) \quad (4.1.3)$$

因为  $\forall X \in X(M)$ ,  $p \in M$ ,  $X(p) \in T_p(M): C_p^\infty \rightarrow R$ , 所以有:

$$X(p)(f) = X_p(f)$$

对  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 令  $X(f)(p) = X(p)(f)$ 。设  $(U, \varphi; x^i)$  是  $p \in M$  附近的一个局部坐标系, 则

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}。对 \forall q \in U,$$

$$\begin{aligned} X(f)(q) &= X(q)(f) = \sum_{i=1}^m X^i(q) \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) \\ &= \sum_{i=1}^m X^i(q) \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

由此可知  $X(f) \in C^\infty(M)$ 。也可以将光滑切向量场  $X$  理解成  $C^\infty(M)$  间的映射  $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ 。

根据切向量的性质易知光滑切向量场  $X$  满足:

(1) 线性:  $\forall f, g \in C^\infty(M), \lambda, \mu \in R,$

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g) \quad (4.1.5)$$

(2) 莱布尼兹法则:

$$X(fg) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f) \quad (4.1.6)$$

反之, 也可以证明: 若映射  $\alpha: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  满足式 (4.1.5) 和式 (4.1.6), 则存在  $X \in X(M)$  使得  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 有  $X(f) = \alpha(f)$ 。换言之, 可以将流形  $M$  上的满足式 (4.1.5) 和式 (4.1.6) 的映射  $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  称为流形  $M$  上的光滑切向量场。

## 4.1.2 李代数与泊松括号积

在之前我们已经讨论了光滑切向量场的加法和数乘运算。在本节中, 我们将引入光滑切向量场间的另外一种运算——泊松括号积, 它也是由两个光滑向量场生成新的光滑向量场的一种重要方式。并且,  $X(M)$  关于泊松括号积是一个李代数 (Lie algebra)。

先来给出李代数的定义和例子。

**定义 4.1.3 (李代数)** 设  $V$  是数域  $F$  上的向量空间, 并且其上有一个算符  $[\cdot, \cdot]$  所决定的映射:

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V, (u, v) \rightarrow [u, v] \in V \quad (4.1.7)$$

满足以下条件:

(1) 对  $\forall u, v, w \in V, \lambda, \mu \in F$ , 有:

$$[\lambda u + \mu v, w] = \lambda[u, w] + \mu[v, w] \quad (4.1.8)$$

(2) 对  $\forall u, v \in V$ , 有:

$$[u, v] = -[v, u] \quad (4.1.9)$$

(3) 对  $\forall u, v, w \in V$ , 有:

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0 \quad (4.1.10)$$

则称  $V$  是数域  $F$  上的一个李代数 (Lie algebra), 称  $[u, v]$  是  $u$  和  $v$  的括号积。若数域  $F$  是实数域  $R$ , 则称  $V$  为实李代数 (real Lie algebra)。若数域  $F$  是实数域  $C$ , 则称  $V$  为复李代数 (complex Lie algebra)。

根据式 (4.1.9) 可以推知: 对  $\forall u \in V$ , 有  $[u, u] = 0$ 。

“李代数”一词是由德国数学家外尔 (H. Weyl, 1885—1955 年) 在 20 世纪 30 年代引入的, 以纪念李群和李代数的创始人——挪威数学家索菲斯·李 (M. Sophus Lie, 1842—1899 年)。李代数是因人们研究无穷小变换的需要而引入的, 所以旧文献中的无穷小群指的就是李代数。

**【例 4.1.1】** 三维欧氏空间  $R^3$  中, 向量  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  间的向量积  $\vec{a} \times \vec{b}$  是一个向量, 并且满足  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ 。对  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 有:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \quad (4.1.11)$$

利用式 (4.1.11) 可推出:

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0 \quad (4.1.12)$$

因此,  $R^3$  关于其中向量间的向量积运算构成一个李代数。

**【例 4.1.2】** 数域  $F$  上的  $n$  阶方阵构成的集合  $gl(n, F)$  可看成数域  $F$  上的  $n^2$  维向量空间。在  $gl(n, F)$  中, 对  $n$  阶方阵  $A$  和  $B$  考虑由矩阵的乘法和减法运算构成的运算:

$$[A, B] = AB - BA \quad (4.1.13)$$

根据矩阵乘法运算的分配律和结合律, 对  $\forall A, B, C \in gl(n, F)$ , 有:

$$[[A, B], C] = ABC - BAC - CAB + CBA \quad (4.1.14)$$

由此可得

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \quad (4.1.15)$$

对照定义 4.1.3 可知,  $gl(n, F)$  关于式 (4.1.13) 定义的运算称为一个李代数。

下面考虑光滑切向量场空间。  $\forall X, Y \in X(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ , 计算可得:

$$\begin{aligned} X \circ Y(fg) &= X(Y(fg)) = X(g \cdot Y(f) + f \cdot Y(g)) \\ &= g \cdot XY(f) + X(g) \cdot Y(f) + f \cdot XY(g) + X(f) \cdot Y(g) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

交换切向量场  $X$  和  $Y$  的位置, 有:

$$Y \circ X(fg) = g \cdot YX(f) + Y(g) \cdot X(f) + f \cdot YX(g) + Y(f) \cdot X(g) \quad (4.1.17)$$

从而, 利用式 (4.1.16) 和式 (4.1.17), 可得:

$$(X \circ Y - Y \circ X)(fg) = g \cdot (X \circ Y - Y \circ X)(f) + f \cdot (X \circ Y - Y \circ X)(g) \quad (4.1.18)$$

也就是说,  $X \circ Y - Y \circ X$  满足莱布尼兹法则。同时, 可以验证  $X \circ Y - Y \circ X$  满足线性式 (4.1.5)。因此,  $X \circ Y - Y \circ X \in X(M)$ 。据此, 引入泊松括号积的定义。

**定义 4.1.4 (泊松括号积)** 设  $M$  为光滑流形,  $X, Y \in X(M)$ , 称由:

$$[X, Y] = XY - YX \quad (4.1.19)$$

所确定的光滑切向量场  $[X, Y]$  为光滑切向量场  $X$  与  $Y$  的泊松括号积 (Poisson bracket) 或李括号 (Lie bracket)。

泊松括号积的命名是为了纪念法国著名的数学家、几何学家和物理学家泊松 (S. D. Poisson, 1781—1840 年)。

泊松括号积相当于  $X(M)$  中的乘法运算。泊松括号积满足如下性质:  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ,  $\lambda \in R, f, g \in C^\infty(M)$ , 有:

(1) 反交换律:

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (4.1.20)$$

(2) 分配律:

$$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z] \quad (4.1.21)$$

(3) 线性:

$$[\lambda X, Y] = \lambda[X, Y] \quad (4.1.22)$$

(4) 雅克比恒等式:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (4.1.23)$$

利用泊松括号积的定义容易证明式 (4.1.20) ~ 式 (4.1.22)。下面来验证式 (4.1.23)。根据定义, 有:

$$\begin{aligned}
[[X, Y], Z] &= X[Y, Z] - [Y, Z]X \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

轮换式 (4.1.24) 中的切向量场  $X$ 、 $Y$  和  $Z$ ，可得  $[[Y, Z], X]$  和  $[[Z, X], Y]$  的表达式。将三式相加可得式 (4.1.23)。

根据反交换律式 (4.1.20)，易知有如下分配律和线性成立：

$$[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z] \tag{4.1.25}$$

$$[X, \lambda Y] = \lambda [X, Y] \tag{4.1.26}$$

另外，成立：

$$[X, X] = 0 \tag{4.1.27}$$

对照泊松括号积的性质和李代数的定义可知， $X(M)$  关于泊松括号积构成一个李代数。

**【例 4.1.3】** 设  $X, Y \in X(M)$ ， $f, g \in C^\infty(M)$ ，求证：

$$[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y] \tag{4.1.28}$$

证明：对  $\forall h \in C^\infty(M)$ ，有：

$$\begin{aligned}
[fX, gY](h) &= fX(gY(h)) - gY(fX(h)) \\
&= fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - fgY(X(h)) \\
&= fg((XY - YX)(h)) + [fX(g)Y - gY(f)X](h) \\
&= \{fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X\}(h)
\end{aligned}$$

根据  $h$  的任意性可知式 (4.1.28) 成立。证毕。

设  $(U; x^i)$  为光滑流形  $M$  在  $p \in M$  处的局部坐标系，光滑切向量场  $X$  和  $Y$  在坐标邻域  $U$  中的限制为  $X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  和  $Y|_U = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，利用式 (4.1.28) 和

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 \tag{4.1.29}$$

可知

$$\begin{aligned}
[X, Y]|_U &= \sum_{i,j=1}^m \left[ X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^i} (X^i) \right] \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i=1}^m [X(Y^i) - Y(X^i)] \frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

**【例 4.1.4】** 设  $X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$ ， $Y = xy^2 \frac{\partial}{\partial x}$  是定义在  $R^2$  上的光滑向量场，求  $[X, Y]$ 。

解：按泊松括号积的定义计算可得：

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial x}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( xy^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) - xy^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \\
&= y^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - xy^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.1.31}$$



$$\begin{aligned}\left[2y \frac{\partial}{\partial y}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\right] &= 2y \frac{\partial}{\partial y} \left(xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) - xy^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= 4xy^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xy^3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2xy^3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 4xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.1.32)$$

所以利用式 (4.1.31) 和式 (4.1.32) 有:

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\right] + \left[2y \frac{\partial}{\partial y}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\right] = (1+4x)y^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.1.33)$$

利用式 (4.1.28) 可知, 对  $\forall X \in X(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ , 有:

$$[fX, gX] = fX(g)X - gX(f)X + fg[X, X] = fX(g)X - gX(f)X \quad (4.1.34)$$

进一步有

$$[X, gX] = X(g)X - gX(1)X = X(g)X \quad (4.1.35)$$

式 (4.1.31) 的计算结果也可利用式 (4.1.35) 计算可得:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) \frac{\partial}{\partial x} = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

### 4.1.3 微分流形上的对合分布

**定义 4.1.5 (微分流形上的光滑分布)** 设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形, 对  $\forall p \in M$ , 取切空间  $T_p M$  的一个  $h$  维子空间  $L_p^h$ 。这些子空间构成流形  $M$  上的一个  $h$  维分布 (distribution), 记为  $L^h$ 。如果在开集  $U \subset M$  上, 分布  $L^h$  由  $h$  个线性无关的光滑切向量场  $X_1, \dots, X_h$  张成, 则称  $L^h$  在  $U$  上是一个光滑的  $h$  维分布, 记为:

$$L^h|_U = \text{span}\{X_1, \dots, X_h\} \quad (4.1.36)$$

易知  $h \leq m$ 。同时, 生成分布的这组线性无关切向量场不是唯一的。事实上, 设切向量场  $Y_\alpha = \sum_{\beta=1}^h a_\alpha^\beta X_\beta$  是线性无关的, 其中  $a_\alpha^\beta \in C^\infty(U)$ , 且系数行列式  $\det(a_\alpha^\beta) \neq 0$ 。那么, 光滑切向量场  $Y_1, \dots, Y_h$  也能张成分布  $L^h$ , 即:

$$L^h|_U = \text{span}\{Y_1, \dots, Y_h\}$$

**定义 4.1.6** 设  $L^h$  是定义在开集  $U \subset M$  上的一个  $h$  维光滑分布,  $X$  是  $M$  上的光滑切向量场。若对  $\forall p \in U$ ,  $X(p) \in L^h(p)$ , 则称  $X$  是属于分布  $L^h$  的光滑切向量场。用  $V(L^h)$  表示属于分布  $L^h$  的光滑切向量场构成的集合。

**定义 4.1.7 (对合分布)** 设  $L^h$  是定义在开集  $U \subset M$  上的一个  $h$  维光滑分布。若分布  $L^h$  的生成切向量场  $X_1, \dots, X_h$  满足:

$$[X_\alpha, X_\beta] \in V(L^h), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq h \quad (4.1.37)$$

则称分布  $L^h$  是对合的 (involutive), 或称分布  $L^h$  满足弗罗贝尼乌斯条件 (Frobenius condition)。

任取属于分布  $L^h$  的两个光滑切向量场  $Y = \sum_{\alpha=1}^h a^\alpha X_\alpha$  和  $Z = \sum_{\beta=1}^h b^\beta X_\beta$ , 计算可得:

$$[Y, Z] = \sum_{\alpha, \beta=1}^h \{a^\alpha (X_\alpha b^\beta) X_\beta - b^\beta (X_\beta a^\alpha) X_\alpha + a^\alpha b^\beta [X_\alpha, X_\beta]\} \quad (4.1.38)$$

若式(4.1.37)成立, 自然可以推出 $[Y, Z] \in V(L^h)$ 。所以, 一个分布是否是对合的, 与生成分布的切向量场的选取无关。同时, 分布是否是对合的定义条件也可以等价修改为: 对任意属于分布 $L^h$ 的光滑切向量场 $X$ 和 $Y$ , 满足:  $[X, Y] \in V(L^h)$ 。或者等价修改为:

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^h C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq h \quad (4.1.39)$$

对 $\forall p \in U$ , 是否存在一个包含 $p$ 点的局部坐标系 $(W; x^i)$ , 使得 $W \subset U$ , 并且分布 $L^h$ 由切向量场 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^h}$ 生成? 这个问题的答案是著名的弗罗贝尼乌斯定理(Frobenius Theorem)。

**定理 4.1.1 (弗罗贝尼乌斯定理)** 设 $U$ 是光滑流形 $M$ 的一个开集,  $L^h$ 是定义在开集 $U \subset M$ 上的一个 $h$ 维光滑分布。分布 $L^h|_U$ 是对合的充要条件是对 $\forall p \in U$ , 存在一个包含 $p$ 点的局部坐标系 $(W; x^i)$ , 使得 $W \subset U$ , 并且

$$L^h|_W = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^h} \right\} \quad (4.1.40)$$

该定理的证明参见黄正中的《微分几何导引》。尽管该定理被称为弗罗贝尼乌斯定理, 但该定理由19世纪代数几何德国学派的领导者之一的克莱布什(R. F. A. Clebsch, 1833—1872年)和德国数学家H. W. F. Deahna(1815—1844年)首先证明。Deahna建立了该定理的充分条件, 而克莱布什则给出了必要条件。德国数学家弗罗贝尼乌斯(F. G. Frobenius, 1849—1917年)将该定理应用于普法夫方程组(Pfaffian systems), 从而为其在微分拓扑中的应用铺平了道路。

我们知道, 光滑流形 $M$ 上的一条曲线在其上各点处有切向量, 因此, 给定流形上的一条曲线, 就可以获得流形上的一组切向量。反之, 给定流形上的一组切向量, 是否就可以确定一条以给定切向量作为其切向量的曲线呢? 这个问题是需要讨论的。如果这样的曲线存在, 则称其为积分曲线。类似的问题: 利用流形在各点处的切空间, 我们可以获得流形上的分布。反之, 给定光滑流形 $M$ 上的一个分布, 是否存在一个流形 $N$ , 使得流形 $N$ 在其上各点 $p$ 处的切空间就是 $L^h(p)$ ? 下面来讨论这个问题。

**定义 4.1.8 (积分流形)** 设 $L^h$ 是定义在开集 $U \subset M$ 上的一个 $h$ 维光滑分布。若 $\varphi: N \rightarrow U$ 是单的浸入子流形, 并且对 $\forall p \in N$ ,  $q = \varphi(p)$ , 有:

$$\varphi_*(T_p N) \subset L_p^h \quad (4.1.41)$$

其中 $L_p^h$ 表示分布 $L^h$ 在点 $p$ 所对应的 $h$ 维切空间, 则称 $(\varphi, N)$ 为分布 $L^h$ 的一个积分流形。

易知积分流形的维数不会超过分布的维数。

**定义 4.1.9 (完全可积的分布)** 设 $L^h$ 是定义在开集 $U \subset M$ 上的一个 $h$ 维光滑分布。若对 $\forall p \in U$ , 都有分布 $L^h$ 的一个 $h$ 维的积分流形经过它, 则称分布 $L^h$ 是完全可积的。

若分布 $L^h$ 在开集 $U \subset M$ 上是对合的, 则根据弗罗贝尼乌斯定理可知, 对 $\forall p \in U$ , 存在一个包含 $p$ 点的局部坐标系 $(W; x^i)$ , 使得 $W \subset U$ , 并且式(4.1.40)成立。所以, 对 $\forall X \in V(L^h)$ ,  $X$ 可由切向量场 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^h}$ 线性表出, 故 $X(x^s) = 0$ ,  $s = h+1, \dots, m$ 。

由方程组  $x^{h+1} = \text{const}, \dots, x^m = \text{const}$  所决定的  $h$  维流形  $N$  在点  $p$  与  $L_p^h$  相切。事实上, 在流形  $N$  上作一条通过点  $p$  的正则曲线  $\gamma(t)$ , 则  $\gamma^s = x^s \circ \gamma = \text{const}$ ,  $s = h+1, \dots, m$ 。所以, 沿该曲线有  $\frac{d\gamma^s}{dt} = 0$ , 由此可得

$$\gamma_* \left( \frac{d}{dt} \right) = \sum_{\alpha=1}^h \frac{d\gamma^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in L_{\gamma(t)}^h \quad (4.1.42)$$

也就是说, 曲线  $\gamma$  在点  $\gamma(t)$  处的切向量属于  $L_{\gamma(t)}^h \subset T_{\gamma(t)} M$ 。注意到点  $p$  在开集  $U$  中的任意性及曲线  $\gamma(t)$  是流形  $N$  上的通过点  $p$  的任意一条曲线, 所以流形  $N$  是分布  $L^h$  的一个积分流形。

#### 4.1.4 诱导切映射与泊松括号积运算的可交换性

下面来考虑光滑流形间的诱导切映射如何作用于泊松括号积上。设  $\phi$  是光滑流形  $M$  到光滑流形  $N$  的一个光滑映射,  $X$  和  $Y$  是  $M$  的开集  $U$  上的光滑切向量场。对  $\forall p \in U$ , 在  $\phi(p) \in W \subset \phi(U)$  的一个邻域中,  $\phi_* X$ 、 $\phi_* Y$  和  $\phi_* [X, Y]$  都是有意义的。下面的定理说明诱导切映射与泊松括号积运算的可交换性。

**定理 4.1.2** 设  $\phi$  是光滑流形  $M$  到光滑流形  $N$  的一个光滑映射,  $X$  和  $Y$  是  $M$  的开集  $U$  上的光滑切向量场, 则:

$$\phi_* [X, Y] = [\phi_* X, \phi_* Y] \quad (4.1.43)$$

**证明:** 对  $\forall p \in U$ ,  $q = \phi(p) \in N$ ,  $f \in C_q^\infty(N)$ ,

$$\begin{aligned} (\phi_* [X, Y])_q f &= [X, Y]_p (\phi^* f) \\ &= X_p \{Y(f \circ \phi)\} - Y_p \{X(f \circ \phi)\} \\ &= X_p \{(\phi_* Y)f\} - Y_p \{(\phi_* X)f\} \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

因为  $(\phi_* Y)f$  和  $(\phi_* X)f$  是  $W \subset \phi(U)$  上的函数, 所以切向量  $X_p$  和  $Y_p$  要作用在它们上, 必须将它们变为在点  $p$  的邻域上的函数, 即:

$$\begin{aligned} (\phi_* [X, Y])_q f &= X_p \{(\phi_* Y)f \circ \phi\} - Y_p \{(\phi_* X)f \circ \phi\} \\ &= (\phi_* X)_q (\phi_* Y)f - (\phi_* Y)_q (\phi_* X)f \\ &= [\phi_* X, \phi_* Y]_q f \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

根据  $q = \phi(p) \in N$  和  $f \in C_q^\infty(N)$  的任意性可知式 (4.1.43) 成立。证毕。

## 4.2 单参数变换群和李导数

光滑流形上一个给定的光滑切向量场可看成是在流形每点处的切空间中取定了一个切向量而构成的场。但反之, 通过每点处的切空间中取定一个切向量来获得切向量场的方式具有一定的随机性, 所得的切向量场随流形各点处所取的切向量的不同而不同, 而且这样所得的切向量场可微性、光滑性都无法保证。而单参数变换群的轨线就是将流形上不同点处的切向量组织在一起进而生成光滑切向量场的一种工具。同时, 也可以利用单参数变换群来移动流形上的切向量获得切向量场的李导数概念。本节将研究单参数变换群的定义和性质, 然后建立李导数的概念。

### 4.2.1 单参数变换群

定义 4.2.1 (单参数变换群) 设  $M$  为光滑流形, 若光滑映射:

$$\varphi: R \times M \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \varphi(t, p) = \varphi_t(p)$$

满足:

(1) 映射  $\varphi_0: M \rightarrow M$  为恒等映射;

(2)  $\forall t, s \in R, \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ ;

则称  $\varphi$  是作用在流形  $M$  上的单参数变换群 (one parameter group of transformation)。

因为

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = id = \varphi_t \circ \varphi_{-t} \quad (4.2.1)$$

所以  $(\varphi_{-t})^{-1} = \varphi_{-t}$  是光滑的。从而,  $\varphi_t: M \rightarrow M$  是光滑同胚, 即  $\varphi_t$  是光滑流形  $M$  上的一个变换。

光滑流形  $M$  上的变换可做复合运算, 将其看成它们之间的乘法运算。这样,  $\varphi_s$  和  $\varphi_t$  可以做乘法  $\varphi_s \circ \varphi_t$ , 从而构成一个群。注意到  $\varphi_0 \circ \varphi_t = \varphi_{0+t} = \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_0$ , 所以这个群有单位元  $\varphi_0$ 。再由式 (4.2.1) 可知  $\varphi_t$  有逆元素  $\varphi_{-t}$ 。

【例 4.2.1】 设  $(x, y) \in R^2$ ,  $\varphi(t, x, y) = (xe^{\lambda t}, ye^{\mu t})$ , 其中  $\lambda$  和  $\mu$  为两个常数, 证明:  $\varphi$  是作用  $R^2$  上的一个单参数变换群。

证明: 因为

$$\varphi_0(x, y) = \varphi(0, x, y) = (xe^0, ye^0) = (x, y)$$

所以映射  $\varphi_0: R^2 \rightarrow R^2$  是恒等映射。又因为对  $\forall t, s \in R$ , 有:

$$\begin{aligned} \varphi_s \circ \varphi_t(x, y) &= \varphi_s(\varphi(t, x, y)) = \varphi_s(xe^{\lambda t}, ye^{\mu t}) = \varphi(s, xe^{\lambda t}, ye^{\mu t}) \\ &= (xe^{\lambda s} e^{\lambda t}, ye^{\mu s} e^{\mu t}) = (xe^{\lambda(s+t)}, ye^{\mu(s+t)}) = \varphi_{s+t}(x, y) \end{aligned}$$

所以  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ 。综上所述,  $\varphi$  是作用  $R^2$  上的一个单参数变换群。证毕。

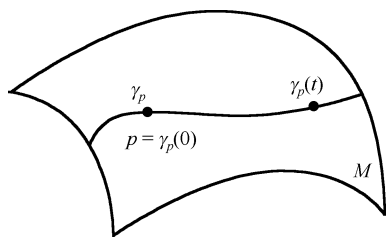


图 4.2.1 轨线

上述定义和讨论是用光滑流形上的变换来理解单参数变换群的——每个  $\varphi_t$  都是光滑流形  $M$  上的一个变换。下面换个角度来研究单参数变换群。

定义 4.2.2 (轨线) 设  $M$  为光滑流形,  $\varphi: R \times M \rightarrow M$  是作用在流形  $M$  上的单参数变换群。令  $\gamma_p(t) = \varphi_t(p) = \varphi(t, p)$ , 称  $\gamma_p: R \rightarrow M$  为单参数变换群  $\varphi$  的通过流形  $M$  上点  $p$  处的轨线。

如图 4.2.1 所示, 当  $t = 0$  时,  $\gamma_p(0) = \varphi(0, p) = \varphi_0(p) = p$ 。

所以,  $\gamma_p$  是通过点  $p$  的曲线。而且, 继承  $\varphi$  的光滑性, 轨线  $\gamma_p$  也是光滑的。

### 4.2.2 单参数变换群的诱导光滑切向量场

下面研究如何利用单参数变换群获得光滑流形上的光滑切向量场。

定义 4.2.3 (沿轨线的诱导切向量场) 设  $M$  为光滑流形,  $\varphi: R \times M \rightarrow M$  是作用在流形  $M$  上的单参数变换群,  $\gamma_p$  为单参数可微变换群  $\varphi$  的通过流形  $M$  上点  $p$  处的轨线。令  $X_p = \gamma'_p(0)$  为轨线  $\gamma_p$  在点  $p$  处的切向量, 则称这样所得的切向量场  $X$  为单参数可微变换群  $\varphi$  在流形  $M$  上的诱导切向量场。

按定义 4.2.3 的方式获得的切向量场  $X$  一定是光滑的。事实上, 设  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  为光滑流形  $M$  上的一条光滑曲线, 流形在  $p = \gamma(0) \in M$  附近有局部坐标系  $(U; x^i)$ 。根据 4.1 节中的讨论, 曲线  $\gamma(t)$  在点  $p$  处的切向量为:

$$\gamma'(0) = v_p = \sum_i \frac{dx^i(0)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.2.2)$$

而  $\gamma_p(t)$  为单参数可微变换群  $\varphi$  的通过流形  $M$  上点  $p$  处的轨线。设点  $p$  的坐标为  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ , 则单参数可微变换群  $\varphi: R \times M \rightarrow M$  将  $R \times M$  中的点  $(t, p)$  映射为  $\varphi(t, p) = (x^1, \dots, x^n) \in M$ , 其中  $x^i = \varphi^i(t, x_0^1, \dots, x_0^n)$ 。从而, 有:

$$X_p = \gamma'_p(0) = \sum_i \left. \frac{\partial \varphi^i(t, x_0^1, \dots, x_0^n)}{\partial t} \right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \bigg|_p \quad (4.2.3)$$

根据单参数可微变换群  $\varphi$  的光滑性可知,  $X_p$  是光滑的。由  $p$  的任意性可知, 切向量场  $X$  是光滑的。

通过上述讨论, 发现定义 4.2.3 提供了一种利用单参数变换群的轨线生成光滑流形上的光滑切向量场的一种恰当方式。

**定理 4.2.1** 设切向量场  $X$  是按定义 4.2.3 所确定的单参数可微变换群  $\varphi$  在流形  $M$  上的诱导切向量场, 则  $\varphi$  的任一条轨线都是  $X$  的积分曲线, 即  $X_q = \gamma'_q(s)$ , 其中  $q = \gamma_p(s)$ 。

**证明:** 如图 4.2.2 所示, 因为  $p = \gamma_p(0)$ ,  $X_p \in T_p M$ , 所以由 4.1 节的结论可知, 对  $\forall f \in C_p^\infty$ , 有:

$$X_p(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (4.2.4)$$

下证  $X_q = \gamma'_q(s)$ 。因为:

$$\begin{aligned} \gamma_q(t) &= \varphi(t, q) = \varphi(t, \gamma_p(s)) = \varphi(t, \varphi(s, p)) \\ &= \varphi_t \circ \varphi_s(p) = \varphi_{t+s}(p) = \gamma_p(t+s) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

所以对  $\forall f \in C_q^\infty$ , 有:

$$\begin{aligned} X_q(f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma_q(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(t+s))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left( \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(u))}{du} \frac{du}{dt} \right|_{t=0} \right) = \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(u))}{du} \right|_{u=s} \\ &= \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(t))}{dt} \right|_{t=s} = \gamma'_p(s)(f) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

由  $f$  的任意性可知  $X_q = \gamma'_q(s)$ 。证毕。

利用的诱导切映射, 也可以将定理 4.2.1 的结论表示为:

$$X_q = (\varphi_s)_*(X_p) \quad (4.2.7)$$

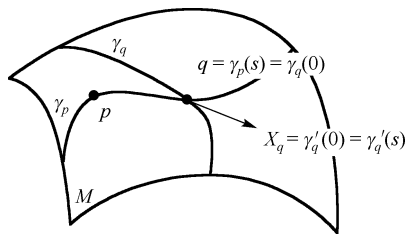


图 4.2.2  $X_q = \gamma'_q(s)$

事实上, 根据 4.1 节的结论可知, 对  $\forall f \in C_p^\infty$ , 可用极限表示  $X_p(f)$ :

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(t))}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \gamma_p(t) - f \circ \gamma_p(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t, p)) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f(p) - f(p)}{t} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

所以, 有:

$$\begin{aligned} X_q(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t, q)) - f(q)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi(t, \varphi(s, p))) - f(\varphi(s, p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{s+t}(p)) - f(\varphi_s(p))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi_s(\varphi(t, p)) - f \circ \varphi_s(p)}{t} \\ &= X_p(f \circ \varphi_s) = (\varphi_s)_*(X_p)(f) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

由  $f$  的任意性可知式 (4.2.7) 成立。

上述讨论说明, 利用单参数可微变换群  $\varphi$  获得的诱导切向量场  $X$  具有一定的特殊性。在点  $q = \gamma_p(s)$  处, 切向量  $X_q$  既等于  $\gamma'_q(0)$ , 也等于  $\gamma'_p(s)$ 。也就是说, 切向量  $X_q$  既是轨线  $\gamma_q(t)$  在  $t=0$  处的切向量, 也是轨线  $\gamma_p(t)$  在  $t=s$  处的切向量。

反之, 利用光滑流形  $M$  上的光滑切向量场  $X$  可以在局部上获得单参数可微变换群  $\varphi$ , 即对  $\forall p \in M$ , 存在点  $p$  的邻域  $U$  和单参数变换群  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$ , 使得光滑切向量场  $X$  在坐标领域  $U$  上的限制  $X|_U$  是  $\varphi$  在  $U$  上诱导的切向量场。进一步, 若  $M$  是紧致的光滑流形, 则由其上的光滑切向量场  $X$  可以生成作用在流形  $M$  上的单参数变换群  $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , 使得  $X$  为  $\varphi$  的诱导切向量场。

### 4.2.3 李导数

设  $M$  为光滑流形, 由流形  $M$  上的单参数可微变换群  $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  可获得流形  $M$  上的变换  $\varphi_t: M \rightarrow M$ 。变换  $\varphi_t$  将点  $\varphi_t(p)$  映射为点:

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(p)) = \varphi_{-t+t}(p) = \varphi_0(p) = \gamma_p(0) = p \quad (4.2.10)$$

所以,  $\varphi_{-t}$  的诱导切映射是  $(\varphi_{-t})_*: T_{\varphi_t(p)}M \rightarrow T_pM$ 。诱导切映射为  $(\varphi_{-t})_*$  将点  $\varphi_t(p)$  处的切空间  $T_{\varphi_t(p)}M$  中的切向量  $Y_{\varphi_t(p)}$  映射为点  $p$  处的切空间  $T_pM$  中的切向量  $(\varphi_{-t})_*(Y_{\varphi_t(p)})$ 。这样,  $(\varphi_{-t})_*(Y_{\varphi_t(p)})$  和  $Y_p$  都是切空间  $T_pM$  中的切向量。据此, 可引入李导数的定义。

**定义 4.2.4 (李导数)** 设  $M$  为光滑流形,  $X, Y \in X(M)$ ,  $\varphi_t$  是由  $X$  生成的局部单参数可微变换群, 若极限:

$$L_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t} \quad (4.2.11)$$

存在, 则称  $L_X Y$  为  $Y$  关于  $X$  的李导数 (Lie derivative)。

如图 4.2.3 所示, 李导数的极限定义刻画了沿切向量场  $X$  的轨线  $\gamma_p$  分布的切向量场  $Y_{\varphi_t(p)}$  的变化率。

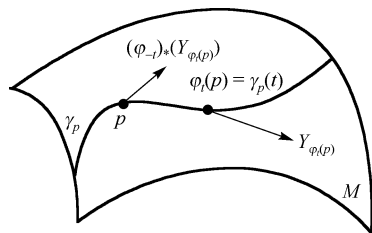


图 4.2.3 李导数

当  $Y = f \in C^\infty(M)$  时,  $Y_p = f(p)$ , 根据式 (4.2.11), 有:

$$\begin{aligned}
L_{X_p} f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_*(f(\varphi_t(p))) - f(p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* f(p) - f(p)}{t} = X_p(f)
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

所以,  $L_X f = X(f)$ , 即流形  $M$  上的光滑函数  $f$  关于切向量场  $X$  的李导数就等于  $f$  关于切向量场  $X$  的方向导数。换句话说, 李导数是方向导数的一种推广。可以证明:  $L_X Y = [X, Y] \in X(M)$ 。因此, 根据泊松括号积的性质可知, 李导数具有以下性质: 对  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ,  $\lambda \in R$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , 有:

- (1)  $L_X(Y + \lambda Z) = L_X Y + \lambda L_X Z$ ;
- (2)  $L_X(fY) = X(f)Y + fL_X Y$ ;
- (3)  $L_X([Y, Z]) = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$ 。

## 4.3 向量丛和切丛

陈省身曾这样解释纤维丛、向量丛的思想: “数学家的办法很简单, 就是在流形的每一点弄一个切平面。每一点都有个矢量空间, 叫切空间, ……这个现象在几何上有一个重大的发展, 就是把切空间竖起来。……给流形的每点一个矢量空间, ……我们就叫它为纤维丛, 或叫矢量丛, 矢量空间丛。” 本节先介绍向量丛的定义和性质, 然后讨论特殊的向量丛——切丛和余切丛。

### 4.3.1 向量丛

**定义 4.3.1(向量丛)** 设  $E$  是一个  $m+n$  维微分流形,  $M$  是一个  $m$  维微分流形,  $\pi: E \rightarrow M$  是光滑的满映射, 若对  $\forall x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x) \in M$  具有  $n$  维向量空间的结构, 并且如下局部平凡化条件 (local triviality requirement) 满足: 对  $\forall p \in M$ , 存在点  $p$  的一个邻域  $U \subset M$  及一个光滑同胚:

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times R^n$$

并且  $\varphi_p: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{p\} \times R^n$  是一个同构, 则称  $(E, M, \pi)$  是流形  $M$  上的一个秩为  $n$  的向量丛 (vector bundle), 其中  $E$  称为全空间 (total space),  $M$  称为底流形或底空间 (base space),  $\pi$  称为丛投影 (bundle projection),  $(U, \varphi)$  称为丛坐标卡 (bundle chart)。我们一般简记向量丛  $(E, M, \pi)$  为  $E$ 。对  $\forall p \in M$ , 称  $E_p = \pi^{-1}(p)$  为向量丛  $E$  在点处的纤维 (fiber)。

根据定义 4.3.1 有可交换图, 如图 4.3.1 所示, 其中映射  $\text{proj}: U \times R^n \rightarrow U$  为自然投影。定义中  $\varphi$  的作用是将全空间  $E$  中的一部分  $\pi^{-1}(U)$  与  $U \times R^n$  建立同胚, 而直积空间  $U \times R^n$  的结构是清晰的。而且在点  $x$  处, 纤维  $\pi^{-1}(p)$  与  $\{p\} \times R^n$  是同构的。这样, 可将向量丛  $E$  局部平凡化。根据定义可知, 对向量丛  $(E, M, \pi)$  而言, 存在流形  $M$  的一个开覆盖  $\{U_\alpha\}$  和一族对应的同胚:

$$\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times R^n$$

这样全空间  $E$  可看成一族直积空间  $\{U_\alpha \times R^n\}$  的并集。

那么, 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 对局部平凡化的公共部分如何粘接呢? 可以利用转移函数 (transition functions) 加以解决。事实上, 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 对  $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ,  $v \in R^n$ , 令

$$(p, (\varphi_{\beta\alpha}(p))(v)) = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(p, v) \quad (4.3.1)$$

该式的映射复合关系可交换图如图 4.3.2 所示。

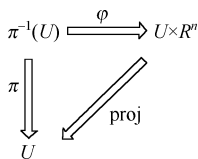


图 4.3.1 可交换图

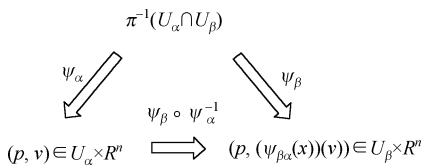


图 4.3.2 映射复合关系可交换图

可记  $\varphi_{\alpha,p}^{-1}(v_{\alpha}) = \varphi_{\alpha}^{-1}(p, v_{\alpha})$ 。此时，式 (4.3.1) 相当于：

$$\varphi_{\beta\alpha}(p) = \varphi_{\beta,p} \circ \varphi_{\alpha,p}^{-1} : R^n \rightarrow R^n \quad (4.3.2)$$

这样，可以得到一族转移函数：

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(n, R)$$

其中  $GL(n, R)$  表示一般线性群 (general linear group)，有时也用  $GL_n(R)$  和  $GL(n)$  加以表示。

转移函数  $\varphi_{\beta\alpha}$  规定了将  $\{p\} \times R^n \subset U_{\alpha} \times R^n$  和  $\{p\} \times R^n \subset U_{\beta} \times R^n$  粘合起来的规则： $R^n$  中的两个向量  $v_{\alpha}$  和  $v_{\beta}$  在同胚  $\varphi_{\alpha}^{-1}$  和  $\varphi_{\beta}^{-1}$  下映射为  $E$  中同一点的条件是：

$$\varphi_{\alpha}^{-1}(p, v_{\alpha}) = \varphi_{\beta}^{-1}(p, v_{\beta}) \quad (4.3.3)$$

所以

$$(p, (\varphi_{\beta\alpha}(p))(v_{\alpha})) = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(p, v_{\alpha}) = (p, v_{\beta}) \quad (4.3.4)$$

故有

$$v_{\beta} = (\varphi_{\beta\alpha}(p))(v_{\alpha}) \quad (4.3.5)$$

式 (4.3.4) 就是我们在粘接  $\{p\} \times R^n \subset U_{\alpha} \times R^n$  和  $\{p\} \times R^n \subset U_{\beta} \times R^n$  时所应遵循的规则。

转移函数也被称为过渡函数、转移映射 (transition maps) 或向量丛的坐标变换 (coordinate transformations)。

**【例 4.3.1】** 设  $\varphi_{\beta\alpha}$  是向量丛  $E$  上的转移函数，求证：

$$(\varphi_{\alpha\beta}(p))^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}(p) \quad (4.3.6)$$

**证明：** 当  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma} \neq \emptyset$  时，根据式 (4.3.2) 定义，对  $p \in U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$ ，有

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}(p)\varphi_{\beta\gamma}(p) &= \varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\alpha,p}^{-1} \circ \varphi_{\beta,p} \circ \varphi_{\gamma,p}^{-1} \\ &= \varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\gamma,p}^{-1} = \varphi_{\alpha\gamma}(p) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

又注意到自然有

$$\varphi_{\alpha\alpha}(p) = I_{n \times n} \quad (4.3.8)$$

因此，利用式 (4.3.7) 和式 (4.3.8) 可得：

$$\varphi_{\alpha\beta}(p)\varphi_{\beta\alpha}(p) = \varphi_{\alpha\alpha}(p) = I_{n \times n} \quad (4.3.9)$$

故式 (4.3.6) 成立。证毕。

例 4.3.1 告诉我们：向量丛  $E$  上的转移函数族  $\{\varphi_{\beta\alpha} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow GL(n, R)\}$  满足相容性条件式 (4.3.7) 和式 (4.3.8)。



反之,也可利用转移函数族来生成向量丛:设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形,  $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$  是流形  $M$  的一个开覆盖。当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时,已经指定了满足式 (4.3.7) 和式 (4.3.8) 的光滑映射  $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, R)$ 。在这样的前提之下,对  $p \in U_\alpha$ ,  $q \in U_\beta$ ,  $v, w \in R^n$ , 我们定义等价关系  $\sim$ :  $(\alpha, p, v) \sim (\beta, q, w) \Leftrightarrow p = q \in U_\alpha \cap U_\beta$ , 并且  $w = \varphi_{\beta\alpha}(p)v$ 。

令

$$E = \left( \bigcup_{\alpha \in I} \{\alpha\} \times U_\alpha \times R^n \right) / \sim$$

映射  $\pi: E \rightarrow M$  为  $\pi([\alpha, p, v]) = p$ , 则利用定义 4.3.1 验证可知  $(E, M, \pi)$  是一个秩为  $n$  的向量丛, 并且它以  $\{\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n) \mid \alpha, \beta \in I\}$  作为它的转移函数族。该向量丛  $(E, M, \pi)$  上的局部平凡化映射为  $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times R^n$ ,  $\varphi_\alpha([\alpha, p, v]) = (p, v)$ 。

**定义 4.3.2 (结构群)** 设  $G$  是一般线性群  $GL(n, R)$  的一个子群, 如  $n$  阶正交群  $O(n)$  (orthogonal group) 和特殊正交群  $SO(n)$  (orthogonal group), 若向量丛  $E$  有一个丛坐标卡集, 它的转移函数都在  $G$  中取值, 则称向量丛  $E$  的结构群为  $G$ 。

**定义 4.3.3 (向量丛的截面)** 设  $(E, M, \pi)$  是一个向量丛, 若可微映射  $s: M \rightarrow E$  使得  $\pi \circ s = id_M$ , 则称  $s$  为向量丛  $E$  的截面。记  $\Gamma(E)$  为向量丛  $E$  的截面构成的集合。

定义 4.3.1 告诉我们, 一个秩为  $n$  的向量丛  $(E, M, \pi)$  可看成是在流形  $M$  上的各点  $x$  处粘接了一个纤维  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , 而纤维  $E_p$  与  $R^n$  同构。所以, 简单地讲, 一个秩为  $n$  的向量丛  $(E, M, \pi)$  可看成是在底流形  $M$  上的各点  $p$  处粘接了一个  $n$  维向量空间  $E_p$ 。而向量丛  $E$  的截面则是在底流形  $M$  上的每一点处的向量空间  $E_p$  中选取一个向量。

**【例 4.3.2 (拉回丛)】** 设  $f: M \rightarrow N$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射,  $(E, N, \pi)$  是流形  $N$  上的一个向量丛,  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  是向量丛  $E$  的一个丛坐标卡集, 用  $\{(f^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ f)\}$  作为丛坐标卡集构造向量丛  $f^*E$ ,  $f^*E$  在点  $p \in M$  处的纤维规定在点  $f(p) \in N$  处的纤维  $E_{f(p)}$ 。称这样得到的向量丛  $f^*E$  是向量丛  $E$  的拉回丛 (pull back bundle)。

**定义 4.3.4 (子丛)** 设  $(E, M, \pi)$  是一个秩为  $n$  的向量丛,  $\tilde{E} \subset E$ , 若对  $\forall p \in M$ , 存在向量丛  $E$  的一个丛坐标卡  $(U, \varphi)$ , 使得  $p \in U$ , 并且:

$$\varphi(\pi^{-1}(U) \cap \tilde{E}) = U \times R^r$$

式中,  $r < n$ , 则称向量丛  $(\tilde{E}, M, \pi|_{\tilde{E}})$  是向量丛的秩为  $r$  的子丛 (subbundle)。

**定义 4.3.5 (向量丛的笛卡儿积)** 设  $(E_1, M, \pi_1)$  和  $(E_2, M, \pi_2)$  是光滑流形  $M$  上的两个向量丛,  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  和  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  分别是向量丛  $E_1$  和  $E_2$  的丛坐标卡集,  $E_{1,p}$  和  $E_{2,p}$  是向量丛  $E_1$  和  $E_2$  在点  $p \in M$  处的纤维。向量丛  $E_1$  和  $E_2$  的笛卡儿积 (Cartesian product) 由向量丛  $E_1$  和  $E_2$  生成的向量丛, 它在点  $p \in M$  处的纤维是  $E_{1,p} \times E_{2,p}$ , 它的丛坐标卡集为  $\{(U_\alpha \cap U_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ , 并且

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(x, (v, w)) = (\varphi_\alpha(x, v), \psi_\beta(x, w)) \quad (4.3.10)$$

式中,  $v \in E_{1,p}$ ,  $w \in E_{2,p}$ 。向量丛  $E_1$  和  $E_2$  的笛卡儿积也称为向量丛  $E_1$  和  $E_2$  的直积。

## 4.3.2 切丛和余切丛

根据 3.4 节的讨论可知, 流形  $M$  在每一点处的切空间是一个向量空间。为了加以直观理

解, 我们可以将流形  $M$  想象成三维空间中的曲面, 那么流形  $M$  在各点处的切空间是一个切平面。以这种方式理解流形及其上各点处切空间的集合是较为困难的。可以把流形在各点处的切空间竖起来, 即流形的各点处粘接了一个竖起来的向量空间, 这样得到的就是切丛。而这种理解方式恰是定义 4.3.1 定义向量丛的方式。

**定义 4.3.6 (切丛)** 如图 4.3.3 所示, 设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形, 将流形  $M$  在各点  $p$  处的切空间  $T_p M$  合并起来得到集合:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (4.3.11)$$

称它为流形  $M$  上的切丛 (tangent bundle)。

对  $\forall p \in M$ , 定义投影  $\pi: TM \rightarrow M$  为: 对  $\forall X_p \in T_p M$ , 有  $\pi(X) = p$ 。这样, 流形  $M$  在

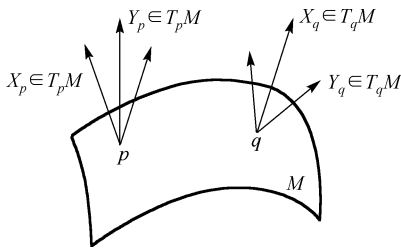


图 4.3.3 切丛

点  $p \in M$  处的切空间  $T_p M$  就是切丛  $TM$  在点  $p \in M$  处的纤维  $\pi^{-1}(p)$ , 即:

$$\pi^{-1}(p) = T_p M$$

设  $A = \{(U_\alpha, \zeta_\alpha) | \alpha \in I\}$  是流形  $M$  的一个光滑结构, 则  $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{x \in U_\alpha} T_x M$ 。故:

$$\bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha) = TM \quad (4.3.12)$$

下面考虑切丛  $TM$  的局部平凡化映射。对  $\forall \alpha \in I$ , 令  $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$  为: 对  $\forall p = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m) \in U_\alpha \subset M$ ,  $\sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \in T_p M$ , 有:

$$\varphi_\alpha \left( \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) = (p, y) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m \quad (4.3.13)$$

式中,  $x_\alpha^i$  表示点  $p \in M$  在坐标映射  $\zeta_\alpha$  下的第  $i$  个局部坐标, 即  $x_\alpha^i = (\zeta_\alpha(x))^i$ ,  $y = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m)$ 。易知映射  $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$  是一一对应的。

**定理 4.3.1** 设  $TM$  是一个  $m$  维光滑流形, 则切丛  $TM$  是一个  $2m$  维光滑流形。

**证明:** 因为

$$\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times \mathbb{R}^m) = \pi^{-1}(U_\alpha) \quad (4.3.14)$$

并注意到式 (4.3.12), 所以

$$B = \bigcup_{\alpha \in I} \{ \varphi_\alpha^{-1}(W) | W \text{ 是 } U_\alpha \times \mathbb{R}^m \text{ 中的任意开集} \}$$

构成切丛  $TM$  的一个开覆盖。另外, 可以验证: 若对  $\forall X \in TM$ , 存在  $V_1, V_2 \in B$ , 使得  $X \in V_1 \cap V_2$ , 则必有  $V \in B$ , 使得  $X \in V \subset V_1 \cap V_2$ 。这样  $B$  构成切丛  $TM$  的一个拓扑基。

对  $\forall \alpha \in I$ , 定义映射:

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \zeta_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$$

为

$$\psi_\alpha \left( \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m) \in R^{2m} \quad (4.3.15)$$

映射  $\psi_\alpha$  是从  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  到  $R^{2m}$  中的开集  $\zeta_\alpha(U_\alpha) \times R^m$  的同胚, 所以

$$\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

构成切丛  $TM$  的一个坐标卡集。易知  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$ 。所以, 当  $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$  时, 对  $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ,  $X_p \in T_p M$ , 有:

$$\sum_{i=1}^m y_\beta^i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i} = X_p = \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} = \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} (\zeta_\beta(x)) \frac{\partial}{\partial x_\beta^j} \quad (4.3.16)$$

由此可得

$$y_\beta^j = \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} \quad (4.3.17)$$

映射

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \zeta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times R^m \rightarrow \zeta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times R^m$$

的映射复合关系可交换图如图 4.3.4 所示。

映射  $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$  对  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m) \in R^{2m}$  的作用为:

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m) = (x_\beta^1, \dots, x_\beta^m, y_\beta^1, \dots, y_\beta^m) \quad (4.3.18)$$

式中,  $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^m) = \zeta_\beta \circ \zeta_\alpha^{-1}(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$ 。可见  $x_\beta^i$  和  $y_\beta^i$  是  $x_\alpha^i$  和  $y_\alpha^i$  的光滑函数。所以, 坐标卡  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$  和  $(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$  是相容的。综上所述, 切丛  $TM$  是一个  $2m$  维光滑流形。证毕。

下面考虑切丛的转移函数族。注意到切丛  $TM$  在  $p \in M$  处的纤维  $\pi^{-1}(p) = T_p M$ , 所以利用映射:

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \zeta_\alpha(U_\alpha) \times R^m$$

可以定义映射  $\psi_{\alpha,p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow R^m$  为:

$$\psi_{\alpha,p} \left( \sum_{i=1}^m y_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right) = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m) \in R^m \quad (4.3.19)$$

则  $\psi_{\alpha,p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow R^m$  是线性同构。这样, 对  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ , 还存在线性同构  $\psi_{\beta,p}: \pi^{-1}(p) \rightarrow R^m$ 。故根据映射复合关系图 4.3.5 可知, 映射  $\psi_{\beta,p} \circ \psi_{\alpha,p}^{-1}: R^m \rightarrow R^m$  是线性同构, 即  $\psi_{\beta,p} \circ \psi_{\alpha,p}^{-1} \in GL(m, R)$ 。

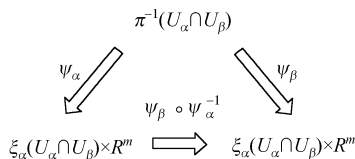


图 4.3.4 映射复合关系图

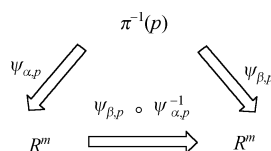


图 4.3.5 映射复合关系图

根据式 (4.3.17) 可知, 映射  $\psi_{\beta,p} \circ \psi_{\alpha,p}^{-1}$  利用雅克比矩阵:

$$J_{\beta\alpha}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^m} & \cdots & \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^m} \end{pmatrix}$$

将  $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m) \in R^m$  变为  $(y_\beta^1, \dots, y_\beta^m) \in R^m$ , 所以有光滑映射  $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(m, R)$ ,  $p \mapsto J_{\beta\alpha}(p)$ 。换句话说,

$$\{J_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n) \mid \alpha, \beta \in I\}$$

就是切丛  $TM$  的转移函数族。

流形  $M$  上的光滑切向量场  $X$  就是切丛  $TM$  的截面。事实上,  $X$  可看成映射  $X: M \rightarrow TM$ , 则对  $\forall p \in M$ ,  $X_p = X(p) \in T_p M$ , 有  $\pi \circ X(p) = p$ 。所以,  $\pi \circ X = \text{id}_M$ 。

流形  $M$  在点  $p$  处的余切空间  $T_p^* M$  是切空间  $T_p M$  的对偶空间, 可以将上述讨论中的  $T_p M$  替换为  $T_p^* M$ , 这样可以获得流形  $M$  上的余切丛 (cotangent bundle):

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

余切丛  $T^* M$  也是一个  $2m$  维的光滑流形。对  $\forall p \in M$ , 余切丛  $T^* M$  在点  $p$  处的纤维是余切空间  $T_p^* M$ 。余切丛  $T^* M$  的截面称为一次外微分式, 它是在流形  $M$  上的各点  $p$  处指定一个余切向量所构成的, 即对  $p \in M$ ,  $f \in C_p^\infty(M)$ , 有:

$$T^* M = \{df|_p \mid p \in M, f \in C_p^\infty(M)\}$$

### 附录 4.3 陈省身生平及学术贡献

陈省身 (Shiing-Shen Chern, 1911—2004 年) (图 4.3.6), 国际数学大师、20 世纪世界级的几何学家、教育家、中国科学院外籍院士。他在整体微分几何上的卓越贡献影响了整个数学的发展, 被杨振宁誉为继欧几里德、高斯、黎曼、嘉当之后又一里程碑式的人物。曾先后主持、创办了三大数学研究所。



图 4.3.6 陈省身

1930 年, 陈省身从南开大学毕业到清华大学任助教, 并随孙光远先生研究射影微分几何。1934 年, 去德国汉堡留学, 师从德国著名的几何学家布拉施克 (W. J. E. Blaschke, 1885—1962 年), 并于 1936 年 2 月获得博士学位。1936 年 9 月, 以博士后研究员的身份到巴黎大学做学术访问, 跟随几何大师嘉当 (Élie J. Cartan, 1869—1951 年), 掌握了嘉当的活动标架和外微分形式等工具。1937 年, 回国并受聘为清华大学教授。期间, 受日本侵华的影响, 清华大学、北京大学和南开大学迁至云南昆明, 成立西南联合大学。陈省身

亦辗转昆明。在艰苦的条件下，他仍然出色地进行教学和科研工作，开设了高等几何、微分几何、微分方程、黎曼几何、拓扑学等课程，在国际权威数学刊物《数学纪事》(*Mathematische Annalen*) 接连发表三篇论文。他开设的课程和讨论班也让严志达(1917—1999年)、王宪钟(1918—1978年)、吴光磊(1921—1991年)、钟开莱(1917—2009年)及杨振宁(1922年—)等受益良多。1943年7月，应美国普林斯顿高等研究所的邀请到美国访问，发表了多篇大范围微分几何方面的重要论文。1948年，任中央研究院数学研究所代理所长。1960年，加入加州大学伯克利分校。1961年，被推选为美国科学院院士，并加入美国国籍。1981年，担任美国数学科学所第一任所长。1984年，担任南开数学研究所所长。1995年，当选为首批中国科学院外籍院士。2000年，定居南开大学。

陈省身综合运用微分几何学、拓扑学的理论和方法，先后完成了两项划时代的重要工作：黎曼流形上的高斯-博内定理的内蕴证明，埃尔米特流形(Hermite manifold)的示性类(characteristic classes)论。1943年10月，陈省身完成《关于闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单证明》(*A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*)，并于1944年发表在美国的著名国际期刊《数学纪事》(*Annals of Mathematics*)第45卷第9期。这是大范围微分几何、内蕴几何发展的重要里程碑之一。之后，陈省身又进一步推广了高斯-波涅公式，发现了陈-高斯-博内定理(Chern-Gauss-Bonnet Theorem)，或者叫广义高斯-博内定理(generalized Gauss-Bonnet theorem)。这一工作导致了1963年的阿蒂亚-辛格指标定理(Atiyah-Singer index theorem)。1945年9月，美国数学会举行夏季大会，陈省身应邀作1小时演讲，在题为《大范围微分几何若干新观点》的演讲中，系统阐述了他继承法国数学家嘉当发展起来的纤维丛的理论方法，引起学术界强烈反响，被赞誉为“表明整体微分几何新时代的到来”。10月，完成论文《埃尔米特流形的示性类》。这是陈省身又一项重要工作，其中提出了现在被称之为“陈类”(Chern class)的不变量，为整体微分几何的发展奠定了基础。2004年，刘克峰(1965年—)撰写的纪念陈省身先生的文章标题就是《我们都属于陈类》。陈省身其他重要的数学工作有：紧浸入与紧逼浸入、复变函数值分布的复几何化、积分几何的运动公式、复流形上实超曲面的陈-莫泽理论、极小曲面和调和映射等。

因其卓越的学术成就和威望，陈省身当选为多个国家的院士：1948年，陈省身当选前中央研究院首届院士；1961年，陈省身继物理学家吴健雄之后当选为第二位华裔美国国家科学院院士，这是美国科学界的最高荣誉职位；1983年，当选第三世界科学院创始成员；1985年，当选为英国皇家学会国外会员；1988年，当选为意大利国家科学院外籍院士；1989年，当选为法国科学院外籍院士；1994年，他当选为中国科学院首批外籍院士。

因其对微分几何和数学所做出的卓越，陈省身一生中获得了包括沃尔夫奖(Wolf Prize)、斯蒂尔奖(Steele Prize)等在内的众多世界数学研究领域的重要奖项：1970年，获得美国数学协会的肖夫内奖；1976年，获美国国家科学奖章，这是美国在科学、数学、工程方面的最高奖，陈省身和吴健雄是最早获得该项荣誉的华人科学家；1983年，美国数学会的斯蒂尔奖；1984年，获沃尔夫数学奖，这是世界数学领域的最高奖项之一，陈省身是获得沃尔夫奖荣誉的第一位华裔数学家；2004年，获首届邵逸夫数学科学奖。

陈省身先生对中国微分几何学的普及和发展，以及中国数学的发展做出了重要贡献。继杨振宁在1971年回中国访问之后，陈省身于1972年9月偕夫人回国。1978年，他在北京大学开设了“微分几何”课程。随后，该课程讲义被陈省身和陈维桓编写为教材《微分几何讲义》并加以出版，该课程和教材在推广微分几何和培养新一代数学工作者上起了重要的作用。

1984 年，他被聘为南开数学研究所所长。1995 年，当选为首批中国科学院外籍院士。2000 年，回到祖国，定居天津南开大学。2002 年在北京召开的第 24 届国际数学家大会也要归功于陈省身先生在 1993 年提出的倡议。陈省身先生一生培养了多位杰出的数学家，吴文俊（1919 年—）、廖山涛（1920—1997 年）、丘成桐（Shing-Tung Yau, 1949 年—）、郑绍远（Shiu-Yuen Cheng）等著名学者都曾师从陈省身。

2004 年 12 月 3 日，陈省身因病在天津逝世。2011 年，南开大学举行了陈省身先生夫妇纪念碑的揭幕仪式。该纪念碑的整体横截面是一个曲边三角形，这个别致的造型象征着陈-高斯-博内定理的最简单情形。纪念碑的正面像黑板上的板书一样刻有陈省身先生在美国任教时手写讲义中的陈-高斯-博内定理，如图 4.3.8 所示。

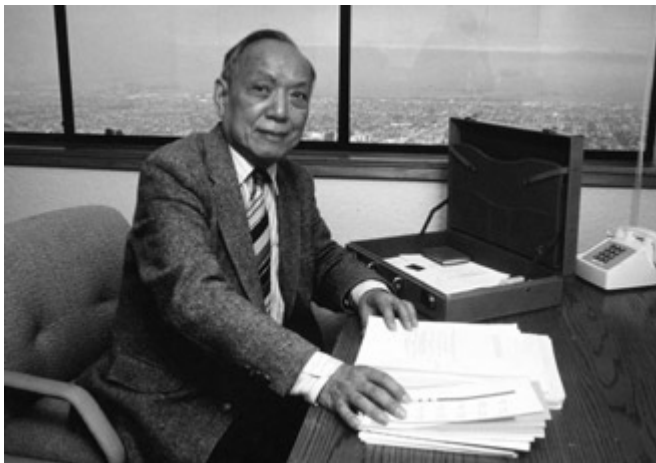


图 4.3.7 陈省身

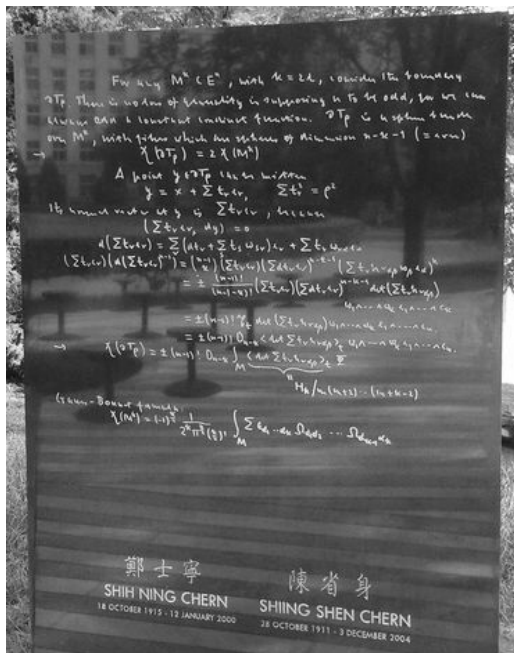


图 4.3.8 陈省身先生夫妇纪念碑

## 习 题 4

1. 对  $\forall X, Y \in X(M)$ , 验证映射  $[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  满足线性, 即  $\forall f, g \in C^\infty M, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 有:

$$[X, Y](\lambda f + \mu g) = \lambda[X, Y](f) + \mu[X, Y](g)。$$

2. 设  $X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, Y = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ , 求  $[[X, Y], Z]$ 。

3. 设  $M$  为光滑流形,  $X, Y \in X(M)$ , 证明:  $L_X Y = [X, Y]$ 。

4. 设  $M$  为光滑流形,  $X, Y, Z \in X(M)$ , 证明:  $L_X([Y, Z]) = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z]$ 。

5. 设  $M$  为光滑流形,  $X, Y \in X(M)$ , 证明:  $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}$ 。

6. 设  $\varphi: M \rightarrow N$  是光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑同胚, 对  $\forall X \in X(M)$ , 定义映射  $\varphi_*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  为: 对  $\forall f \in C^\infty(N)$ , 有:

$$\varphi_*(X)(f) = X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$$

证明:

(1)  $\varphi_*(X)$  是流形  $N$  上的光滑切向量场;

(2) 对  $\forall p \in M, \varphi_{*p}(X(p)) = (\varphi_* X)(\varphi(p))$ ;

(3) 对  $\forall X, Y \in X(M)$ , 有  $\varphi_*([X, Y]) = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$ 。

7. 设  $M$  为光滑流形,  $\varphi: X(M) \rightarrow X(M)$  是  $C^\infty(M)$ -线性映射。对于  $\forall X, Y \in X(M)$ , 令

$$(L_X \varphi)(Y) = [X, \varphi(Y)] - \varphi([X, Y])$$

求证:  $L_X \varphi: X(M) \rightarrow X(M)$  是  $C^\infty(M)$ -线性的。

8. 设  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 令

$$\varphi(t, x, y) = (x \cos \lambda t + y \sin \lambda t, -x \sin \lambda t + y \cos \lambda t)$$

其中  $\lambda$  为常数。证明:  $\varphi$  是作用在  $\mathbb{R}^2$  上的单参数变换群, 并求它的诱导切向量场。

9. 设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形,  $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$  是流形  $M$  的一个开覆盖。对  $\forall \alpha, \beta \in I$ , 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 指定了满足式 (4.3.7) 和式 (4.3.8) 的光滑映射  $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 。根据例 4.3.1 之后的讨论详细证明: 存在一个以  $\{\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in I\}$  为转移函数族的秩为  $n$  的向量丛  $(E, M, \pi)$ 。

10. 设  $RP^n$  是  $n$  维实射影空间, 可知任意一点  $p \in RP^n$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的一维线性子空间。令  $E = \bigcup_{p \in RP^n} p$ , 映射

$\pi: E \rightarrow RP^n$  使得: 对  $\forall v \in p$ , 有  $\pi(v) = p$ 。

(1) 构造  $E$  的光滑结构, 使得  $(E, RP^n, \pi)$  成为实射影空间  $RP^n$  上的秩为 1 的向量丛;

(2) 求向量丛  $(E, RP^n, \pi)$  的转移函数族。

## 张量场、黎曼流形与列维-齐维塔联络

黎曼的分析技术包括度量和曲率张量，他在几何领域创造了富有意义的变革，并且改变了几何问题的前景。黎曼的观点主导了微分几何，直到嘉当学派引进活动标架法。

——E. Portnoy

张量分析主要研究张量场的协变微分（也称为绝对微分）。张量分析是由意大利数学家里奇-库尔巴斯托罗（G. Ricci-Curbastro, 1853—1925 年）创立的。他在黎曼、意大利数学家贝尔特拉米（E. Beltrami, 1835—1900 年）、德国数学家克里斯托费（E. B. Christoffel, 1829—1900 年）、德国数学家利普希茨（R. O. S. Lipschitz, 1832—1903 年）等人开创的微分不变量研究基础上，发展了张量分析方法，创建了绝对微分学理论。里奇在 1892 年发表的一篇文章中第一次对他的方法做了系统论述，并用它来解决微分几何和数学物理学中的一些问题。后来里奇和他的学生列维-齐维塔（Levi-Civita, 1873—1941 年）等人又给出了这一方法的更多应用。列维-齐维塔早期的代表作《动力方程变换》（*Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, 1896 年）的主题就是论述绝对微分法的应用。

在 1896 年发表的研究内蕴微分几何的论文中，里奇提出了缩约张量（里奇张量）的概念，并发展了协变微分学。1900 年，他和他的学生列维-奇维塔发表了《绝对微分法及其应用》（*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*）等经典文章。在此之后，张量的概念为更多的数学家所了解和使用。1915 年，美国物理学家爱因斯坦创立了广义相对论。从创立狭义相对论到创立广义相对论的过程中，爱因斯坦遇到的困难之一就是缺乏可以使用的数学语言和工具。除黎曼几何外，张量分析是爱因斯坦使用的另一重要数学工具。在广义相对论创立之后，张量分析被更多的人所重视和接受，成为理论物理学的重要工具。

欧氏几何是用公理化的方法建立在五条公理之上的，利用它们可以推理演绎成一个完整自洽的理论体系。其中的第五条公理——平行公理的证明曾困扰世人一千多年，人们试图用其他公理加以证明，但种种努力都以失败告终。19 世纪上半叶，德国数学家高斯、俄国数学家罗巴切夫斯基和匈牙利数学家鲍耶先后发现了第五公理的不可证明性，即独立性。在此基础上，罗巴切夫斯基和黎曼分别建立了罗氏几何和黎曼几何，它们也被称为双曲几何和椭圆几何，它们都是非欧几何。从流形的角度加以理解，这三种几何的本质区别在于它们的度量不同，并导致它们的曲率不同。就二维空间来看，欧氏几何在平面上成立，而双曲和椭圆几何分别在伪球面和球面上成立。爱因斯坦曾经说过：“纯粹数学的建构可以使我们发现观念和它们之间联系的法则，开启我们对自然现象的理解。”他所说的纯粹数学的建构指的就是黎曼创立的黎曼几何。

外微分式和活动标架是微分几何中的两个重要工具。活动标架法最早是由法国数学家达



布 (J. G. Darboux, 1842—1917 年) 提出来的。他在微分几何方面的研究成果总结在他的《正交系讲义》和四卷本的《曲面一般理论讲义》之中,《曲面一般理论讲义》所用的一个主要工具就是活动标架。而一次外微分式也是由达布和德国数学家弗罗贝尼乌斯 (F. G. Frobenius, 1849—1917 年) 发现的。他在解普法夫问题时所建立的达布定理就是关于微分形式的一个定理, 部分地推广了弗罗贝尼乌斯定理, 它是包括辛几何在内多个数学领域的重要基石。外微分式和活动标架法被法国数学家嘉当 (E. J. Cartan, 1869—1951 年) 很好地继承与发展, 并将之应用于微分流形的研究中。

联络是研究微分流形的几何特性、开展流形上分析的基石。德国数学家外尔 (H. Weyl, 1885—1955 年) 在其 1918 年的著作《空间、时间、物质》中引入了仿射联络的概念。嘉当在他的论文《仿射联络的流形及广义相对论理论》(1923—1924 年) 中给出了仿射联络的权威性论述。在这篇论文出现之初, 嘉当的工作是超前的。论文中的思想容易推广到李群的纤维丛的联络理论中。陈省身很好地继承了嘉当的理论方法, 并将之发扬光大, 建立了埃尔米特流形的陈示性类。

在本章中, 我们将建立张量场、黎曼流形、外微分式、列维-齐维塔联络、截曲率、里奇曲率、数量曲率、空间形式、爱因斯坦流形、卡拉比-丘流形等概念, 讨论张量场的李导数和切向量场的协变微分等分析运算。

## 5.1 光滑张量场

利用向量空间  $V$  和对偶空间  $V^*$ , 可以生成张量积空间:

$$V_s^r = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{r \uparrow} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{s \uparrow}$$

而微分流形  $M$  在其上任一点  $p$  处的切空间  $T_p M$  和余切空间  $T_p^* M$  互为对偶空间, 故可以利用它们生成流形  $M$  在点  $p$  处的张量积空间, 由此获得张量场的概念。本节将研究光滑张量场及其李导数。

### 5.1.1 光滑张量场

**定义 5.1.1 (( $r, s$ ) 型张量场)** 设  $M$  为  $m$  维光滑流形, 称  $M$  在点  $p$  处的  $r$  个切空间和  $s$  个余切空间构成的张量积空间:

$$T_s^r(p) = \overbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}^{r \uparrow} \otimes \overbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}^{s \uparrow}$$

为  $M$  在点  $p$  处的  $(r, s)$  型张量空间 (tensor space)。即:

$$T_s^r(p) = L(\underbrace{T_p^* M, \cdots, T_p^* M}_{r \uparrow}, \underbrace{T_p M, \cdots, T_p M}_{s \uparrow}; R)$$

称  $T_s^r(p)$  中的元素为  $M$  在点  $p$  处的  $(r, s)$  型张量。若  $\forall p \in M$ , 有  $\tau \in T_s^r(p)$ , 则称  $\tau$  为光滑流形  $M$  在上的一个  $(r, s)$  型张量场 (tensor field)。

下面考虑张量场的局部表达式。设  $(U; x^i)$  是光滑流形  $M$  在点  $p$  处的局部坐标系,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  和  $\{dx^j\}_{j=1}^m$  分别为  $M$  在点  $p$  处的自然基底和对偶基底。  $\forall \tau \in T_s^r(p)$ , 易知有:

$$\tau|_U = \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \quad (5.1.1)$$

式中,  $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \tau \left( dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \right)$  称为  $(r, s)$  型张量场  $\tau$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  中分量函数。

用分量函数的可微性和光滑性来定义张量场的可微性和光滑性。

**定义 5.1.2 (光滑张量场)** 若光滑流形  $M$  每一点  $p$  处都有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 使得  $(r, s)$  型张量  $\tau$  都有局部表达式 (5.1.1), 并且分量函数  $\tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(M)$ , 则称  $\tau$  为光滑流形  $M$  上的  $(r, s)$  型光滑张量场。用  $T_s^r(M)$  表示流形  $M$  上的所有  $(r, s)$  型的光滑张量场的集合。

特别地, 有  $T_0^0(M) = C^\infty(M)$ ,  $T_0^1(M) = X(M)$ ,  $T_1^0(M) = A^1(M)$ 。

可定义空间  $TM := \bigoplus_{r,s \geq 0} T_s^r(M)$ 。因为  $(r, s)$  型的张量场在每一点处都是一个  $(r, s)$  型的张量, 所以张量空间中定义的增加、数乘、 $C^\infty(M)$  乘法、张量积和缩并运算都可以搬到光滑张量场空间中。

**【例 5.1.1】** 设  $M$  为光滑流形,  $f \in C^\infty(M)$ , 我们知道流形  $M$  在点  $p$  处的余切向量  $df(p) \in T_p^*M = T_1^0(p)$ 。也就是说,  $df$  是流形  $M$  上的一个  $(0, 1)$  型张量场。称  $df$  为流形  $M$  上的一次外微分式。称光滑流形  $M$  上的所有一次外微分式构成的空间为流形  $M$  的一次外微分式空间, 记为  $A^1(M)$ 。

考虑一次外微分式  $df$  的局部表达式。设  $(U; x^i)$  是光滑流形  $M$  在点  $p$  处的局部坐标系,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^m$  和  $\{dx^j\}_{j=1}^m$  分别为  $M$  在点  $p$  处的自然基底和对偶基底。设  $df|_U = \sum_{i=1}^m a_i dx^i$ , 两边作用于  $\frac{\partial}{\partial x^k}$ , 有  $a_k = df \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$ 。所以,

$$df|_U = \sum_{i=1}^m df \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

**【例 5.1.2】** 考虑  $(1, 1)$  型张量场  $\tau \in T_1^1(M)$ 。  $\forall p \in M$ , 有局部坐标系  $(U; x^i)$ 。在  $\tau|_U = \sum_{i,j=1}^m a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$  的两边作用于  $\left( dx^k, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$ , 可得  $a_l^k = \tau \left( dx^k, \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$ 。因此, 有:

$$\tau|_U = \sum_{i,j=1}^m \tau \left( dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

实际上, 对  $\forall p \in M$ ,  $(r, s)$  型光滑张量场  $\tau \in T_s^r(M)$  是多重  $C^\infty(M)$  线性映射:

$$\tau: \underbrace{A^1(M) \times \dots \times A^1(M)}_{r \uparrow} \times \underbrace{X(M) \times \dots \times X(M)}_{s \uparrow} \rightarrow C^\infty(M)$$

其定义为: 对  $\forall \alpha^1, \dots, \alpha^r \in A^1(M)$ ,  $X_1, \dots, X_s \in X(M)$ , 有:

$$(\tau(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s))(p) = \tau(p)(\alpha^1(p), \dots, \alpha^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p))$$

$(r, s)$  型光滑张量场  $\tau \in T_s^r(M)$  要求对每个变量都是  $C^\infty(M)$  线性的, 即对  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,  $1 \leq k \leq r$ ,  $1 \leq l \leq s$ , 有:

$$\tau(\alpha^1, \dots, f\alpha^k, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s) = f\tau(\alpha^1, \dots, \alpha^k, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_s)$$

$$\tau(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, fX_l, \dots, X_s) = f\tau(\alpha^1, \dots, \alpha^r, X_1, \dots, X_l, \dots, X_s)$$

事实上, 多重  $C^\infty(M)$ -线性是检验映射:

$$\tau: \underbrace{A^1(M) \times \dots \times A^1(M)}_{r \uparrow} \times \underbrace{X(M) \times \dots \times X(M)}_{s \uparrow} \rightarrow C^\infty(M)$$

是否是  $(r, s)$  型光滑张量场的依据。

**【例 5.1.3】** 设  $M$  为光滑流形, 映射  $\tau: A^1(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  定义为: 对  $\forall \alpha \in A^1(M)$ ,  $X_1, X_2 \in X(M)$ , 有:

$$\tau(\alpha, X_1, X_2) = \alpha([X_1, X_2])$$

显然映射关于  $\alpha$  是  $C^\infty(M)$  线性的, 但关于  $X_1, X_2$  不是  $C^\infty(M)$  线性的。事实上, 对  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} \tau(\alpha, fX_1, X_2) &= \alpha([fX_1, X_2]) = \alpha(fX_1X_2 - X_2(fX_1)) \\ &= f\alpha([X_1, X_2]) - X_2(f)\alpha(X_1) \\ &= f\tau(\alpha, X_1, X_2) - X_2(f)\alpha(X_1) \\ \tau(\alpha, X_1, fX_2) &= \alpha([X_1, fX_2]) = \alpha(X_1(fX_2) - fX_2X_1) \\ &= f\alpha([X_1, X_2]) + X_1(f)\alpha(X_2) \\ &= f\tau(\alpha, X_1, X_2) + X_1(f)\alpha(X_2) \end{aligned}$$

从而, 映射  $\tau: A^1(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  不是流形  $M$  上的  $(1, 2)$  型光滑张量场。

### 5.1.2 张量场的李导数

考虑光滑向量场  $X \in X(M)$ , 设  $\varphi_t$  是向量场  $X$  所对应的单参数变换群。 $\varphi_t$  的诱导切映射和诱导余切映射分别为  $(\varphi_{-t})_*: T_{\varphi_t(p)}M \rightarrow T_pM$  和  $(\varphi_t)^*: T_{\varphi_t(p)}^*M \rightarrow T_p^*M$ , 由它们可以进一步诱导出张量之间的线性同构:  $\varphi_t: T_s^r(\varphi_t(p)) \rightarrow T_s^r(p)$ , 满足:  $\forall \tau \in T_s^r(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} \tau(\varphi_t(p)) &= \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\varphi_t(p)) \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \right) \Big|_{\varphi_t(p)} \\ \varphi_t(\tau)(p) &= \tau_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\varphi_t(p)) (\varphi_{-t})_* \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_{\varphi_t(p)} \right) \otimes \dots \otimes (\varphi_{-t})_* \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_{\varphi_t(p)} \right) \\ &\quad \otimes (\varphi_t)^* (dx^{j_1} \Big|_{\varphi_t(p)}) \otimes \dots \otimes (\varphi_t)^* (dx^{j_s} \Big|_{\varphi_t(p)}) \end{aligned}$$

据此给出张量场的李导数概念。

**定义 5.1.3 (张量场的李导数)** 设  $M$  为光滑流形,  $\forall \tau \in T_s^r(M)$ ,  $X \in X(M)$ ,  $\phi_t: T_s^r(\varphi_t(p)) \rightarrow T_s^r(p)$  是向量场  $X$  所对应的单参数变换群所诱导的张量之间的线性同构, 若极限:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t(\tau) - \tau}{t}$$

存在, 则称该极限值为张量场  $\tau$  沿向量场  $X$  的李导数 (Lie derivative), 记为  $L_X \tau$ 。

易知张量场在李导数的作用下保持类型不变, 即对  $\forall \tau \in T_s^r(M)$ ,  $L_X \tau \in T_s^r(M)$ 。

**定理 5.1.1** 张量场的李导数具有如下性质:

- (1)  $\forall \tau_1, \tau_2 \in T_s^r(M), \lambda \in R, \text{ 有 } L_X(\tau_1 + \lambda \tau_2) = L_X \tau_1 + \lambda L_X \tau_2;$
- (2)  $\forall \tau_1 \in T_s^r(M), \tau_2 \in T_l^k(M), \text{ 有 } L_X(\tau_1 \otimes \tau_2) = L_X \tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_1 \otimes L_X \tau_2;$
- (3)  $\forall \tau \in T_s^r(M), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s, \text{ 有 } C_j^i(L_X \tau) = L_X C_j^i(\tau)。$

## 5.2 单位分解定理、黎曼流形和伪黎曼流形

单位分解定理是在流形上建立局部与整体联系的桥梁, 它常常被用来构造流形上的整体概念。本节将给出单位分解定理及其相关概念, 然后引入黎曼流形的概念, 并利用单位分解定理证明黎曼度量的存在性, 最后介绍伪黎曼流形的概念。

### 5.2.1 单位分解定理

**定义 5.2.1 (支撑集)** 设  $f: M \rightarrow R$  为流形  $M$  上的连续函数, 函数值不等于零的点所构成的集合的闭包称为  $f$  的支撑集 (support set), 简称支集, 记为  $\text{supp} f = \{p \in M | f(p) \neq 0\}$ 。

**定义 5.2.2 (局部有限的子集簇)** 设  $\Sigma = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$  为拓扑空间  $M$  上的子集簇, 若对  $\forall p \in M$ , 存在点  $p$  的邻域  $V$ , 使得  $V$  只与子集簇  $\Sigma$  中的有限个  $U_\alpha$  相交, 则称子集簇  $\Sigma$  是局部有限的。

**定义 5.2.3 (加细覆盖)** 设  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  为拓扑空间  $M$  的两个开覆盖, 若对  $\forall U_\alpha \in \Sigma_1$ , 存在  $V_\beta \in \Sigma_2$ , 使得  $U_\alpha \subset V_\beta$ , 则称  $\Sigma_1$  为开覆盖  $\Sigma_2$  的加细 (refinement of a covering)。

**定理 5.2.1 (单位分解定理)** 设  $M$  为满足第二可数公理的光滑流形,  $\Sigma = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$  为流形  $M$  的任一开覆盖, 则  $\Sigma$  必有一个可数的、局部有限的加细开覆盖  $\Sigma_1 = \{V_i | i \geq 1\}$ , 以及定义在流形  $M$  上的一簇光滑函数  $\{f_i \in C^\infty(M) | 1 \leq i < \infty\}$ , 使得:  $0 \leq f_i \leq 1, \sum_{i=1}^{\infty} f_i = 1$ , 并且  $\text{supp} f_i$  为  $V_i$  内的紧致子集。称光滑函数簇  $\{f_i \in C^\infty(M) | 1 \leq i < \infty\}$  为从属于  $\Sigma_1 = \{V_i | i \geq 1\}$  的单位分解 (unit decomposition)。

### 5.2.2 黎曼流形

3.2 节给拓扑流形添加了微分结构这种附加, 由此得到微分流形。如果再进一步在微分流形上添加黎曼度量这种附加结构, 可以得到黎曼流形。

**定义 5.2.4 (黎曼流形)** 称光滑流形  $M$  上的一个对称的、正定的 (0,2) 型光滑张量场  $g$  为流形  $M$  上的一个黎曼度量 (Riemannian metric)。即  $\forall X, Y \in X(M)$ , 有:

$$g(X, Y) = g(Y, X) \quad (5.2.1)$$

$$g(X, X) \geq 0 \quad (5.2.2)$$

其中等号成立当且仅当  $X = 0$ 。我们称指定了一个黎曼度量  $g$  的光滑流形  $M$  为黎曼流形 (Riemannian manifold), 记为  $(M, g)$ , 简记为  $M$ 。

可以从局部角度理解黎曼度量: 对  $\forall p \in M$ ,  $g(p)$  是切空间  $T_p M$  上的一个对称的、正定的 (0,2) 型协变张量, 所以:

$$g(p) \in T_p^* M \otimes T_p^* M = L(T_p M, T_p M; R)$$

因此,  $g(p)$  就相当于切空间  $T_p M$  中的一个正定的内积。由此, 可以考虑切向量的长度、两切向量间的夹角:  $\forall u, v \in T_p M$ ,  $v$  的长度:

$$|v| = \sqrt{g(p)(v, v)} \quad (5.2.3)$$

而切向量  $u$  和  $v$  的夹角  $\theta$  可由余弦决定:

$$\cos \theta = \frac{g(p)(u, v)}{|u||v|} \quad (5.2.4)$$

当然, 黎曼度量的应用远不只这些, 它还可以用来引入克里斯托弗符号, 定义切向量场的协变微分, 进而讨论流形的曲率。

**定理 5.2.2 (黎曼度量的存在性)** 满足第二可数公理的光滑流形上必存在黎曼度量。

**证明:** 先在局部上构造一个对称的、正定的  $(0, 2)$  型光滑张量场。对  $\forall p \in M$ , 设  $(U; x^i)$  为  $m$  维光滑流形  $M$  在点  $p$  处的一个局部坐标系。令  $g|_U = \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i$ , 则对  $\forall q \in U, u = u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_q M$ ,  $v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in T_q M$ , 有:

$$\begin{aligned} g(q)(u, v) &= \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i \left( \sum_{j=1}^m u^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_{k=1}^m v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^m u^j v^k dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m u^i v^i = g(q)(v, u) \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

由此可得

$$g(q)(u, u) = \sum_{i=1}^m (u^i)^2 \geq 0 \quad (5.2.6)$$

其中等号成立当且仅当  $u^i = 0, i = 1, \dots, m$ , 即  $u = 0$ 。从而,  $g|_U$  是在  $U$  上的对称的、正定的  $(0, 2)$  型张量场。

下面再利用单位分解定理将局部上对称的、正定的  $(0, 2)$  型张量场拼装成流形上的整体黎曼度量。设  $\{(V_\alpha; x_\alpha^i)\}$  是流形  $M$  的一个坐标卡集, 因为流形  $M$  满足第二可数公理, 所以由单位分解定理可知, 覆盖  $\{V_\alpha\}$  存在一个可数的、局部有限的加细开覆盖  $\{U_\beta | \beta \in I\}$  及从属于该开覆盖的单位分解  $\{h_\beta\}$ , 满足:  $h_\beta \in C^\infty(M), 0 \leq h_\beta \leq 1, \sum_\beta h_\beta = 1$ , 并且  $\text{supp } h_\beta \subset U_\beta$ 。

令  $g|_{U_\beta} = \sum_{i=1}^m dx_\beta^i \otimes dx_\beta^i$ ,  $g = \sum_{\beta \in I} h_\beta \cdot g_\beta$ , 则  $g \in T_2^0(M)$ 。由单位分解的定义可知:

$$(h_\beta \cdot g_\beta)(p) = \begin{cases} h_\beta(p) g_\beta(p), & p \in U_\beta \\ 0, & p \notin U_\beta \end{cases} \quad (5.2.7)$$

所以,  $h_\beta \cdot g_\beta$  是流形  $M$  上的一个对称的、正定的张量场。

因为  $\{U_\beta | \beta \in I\}$  是局部有限的, 所以对  $\forall p \in M$ , 点  $p$  只与有限多个  $U_\beta$  相交, 不妨设为  $U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_r}$ 。设  $(U, x^i)$  为流形在点  $p$  处的一个局部坐标系, 满足  $U \subset U_{\beta_1} \cap \dots \cap U_{\beta_r}$ 。那么, 有:

$$\begin{aligned}
g|_U &= \sum_{k=1}^r h_{\beta_k} \cdot g_{\beta_k}|_U = \sum_{k=1}^r h_{\beta_k} \sum_{l=1}^m dx_{\beta_k}^l \otimes dx_{\beta_k}^l \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m h_{\beta_k} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^i} dx^i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^j} dx^j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m h_{\beta_k} \left( \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^i} \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j \\
&= \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

式中,  $g_{ij} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^i} \frac{\partial x_{\beta_k}^l}{\partial x^j} \in C^\infty(U)$ 。由此可知,  $g_{ij} = g_{ji}$ , 即  $g$  是对称的。

因为单位分解  $\{h_\beta\}$  满足:  $0 \leq h_\beta \leq 1$ ,  $\sum_{\beta \in I} h_\beta = 1$ , 所以, 对  $\forall p \in M$ , 存在  $\alpha \in I$ , 使得  $h_\alpha(p) > 0$ 。因此, 对  $\forall v \in T_p M$ , 有:

$$\begin{aligned}
g(p)(v, v) &= \sum_{\beta \in I} h_\beta(p) g_\beta(p)(v, v) \geq h_\alpha(p) g_\alpha(p)(v, v) \\
&= h_\alpha(p) \sum_{i=1}^m (dx_\alpha^i(v))^2 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

并且如果  $g(p)(v, v) = 0$ , 则式 (5.2.9) 中的不等号要变成等号, 由此可知:

$$h_\alpha(p) \sum_{i=1}^m (dx_\alpha^i(v))^2 = 0 \tag{5.2.10}$$

而  $h_\alpha(p) > 0$ , 所以有:

$$0 = dx_\alpha^i(v) = dx_\alpha^i \left( v^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) = v^j, \quad 1 \leq i \leq m \tag{5.2.11}$$

从而, 有  $v = \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} = 0$ 。综上可知,  $g$  是正定的。证毕。

**【例 5.2.1】** 计算平面  $R^2$  在极坐标系下的黎曼度量表达式。

**解:** 平面直角坐标  $(x, y)$  和极坐标  $(r, \theta)$  的转化关系式:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ 。这样, 有:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \{-r \sin \theta, r \cos \theta\}$$

所以, 有:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2$$

因此, 平面  $R^2$  在极坐标系下的黎曼度量表达式为:

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{5.2.12}$$

### 5.2.3 伪黎曼流形

通过在微分流形上附加不同的度量结构, 可以获得不同的微分流形。事实上, 除了黎曼度量结构以外, 还可以在微分流形上附加伪黎曼度量, 从而获得伪黎曼流形。

在 1854 年发表的《论作为几何基础的假设》的著名就职演说中,黎曼引入了黎曼度量的概念。他也曾建议研究切空间上不是由数量积诱导的更一般的度量。这类度量首先由德国数学家芬斯勒 (P. Finsler, 1894—1970 年) 所研究,他在 1918 年的论文中研究了每一点切空间具有非对称模的微分流形,这类流形被法国数学家嘉当在 1933 年命名为芬斯勒流形 (Finsler manifold),以纪念芬斯勒的贡献。陈省身先生也曾倡导进行芬斯勒几何的研究。

伪黎曼流形 (pseudo-Riemannian manifold) 是黎曼流形的另一种推广,其度量张量不要求是正定的,取而代之以非退化这一较弱的条件。

**定义 5.2.5 (伪黎曼流形)** 伪黎曼流形  $(M, g)$  是指定了一个非退化、光滑、对称的度量  $g$  的微分流形  $M$ 。该度量  $g$  称为伪黎曼度量 (pseudo-Riemannian metric)。

与黎曼度量的值一定是非负的不同,伪黎曼度量的值可以是正的、负的或者零。正定的伪黎曼度量就是通常所说的黎曼度量。因此,可以说:黎曼流形是具有正定黎曼度量的伪黎曼流形。

根据二次型的西尔维斯特惯性定理,伪黎曼度量可以经过线性变换化为:

$$g = -(\mathrm{d}x^1)^2 - \cdots - (\mathrm{d}x^p)^2 + (\mathrm{d}x^{p+1})^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^{p+q})^2 \quad (5.2.13)$$

称该伪黎曼度量的指标为  $(p, q)$ , 即负惯性指标是  $p$ , 正惯性指标是  $q$ 。而洛伦兹流形 (Lorentz manifold) 是伪黎曼流形的一种重要类型,其度量指标为  $(1, n)$ , 具体定义如下:

**定义 5.2.6 (洛伦兹流形)** 对  $\forall x = (x^1, \cdots, x^{n+1}), y = (y^1, \cdots, y^{n+1}) \in R^{n+1}$ , 定义洛伦兹度量为:

$$g(x, y) = -x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^{n+1} y^{n+1} \quad (5.2.14)$$

称  $(R^{n+1}, g)$  是  $n+1$  维的洛伦兹流形或洛伦兹空间, 记为  $R_1^{n+1}$  或  $R^{1,n}$ 。

洛伦兹流形是为了纪念荷兰物理学家洛伦兹 (H. A. Lorentz, 1853—1928 年) 而如此命名的。洛伦兹流形在相对论中有着重要应用。事实上, 相对论的一个重要基础是时空可以表示为一个度量指标为  $(1, 3)$  (或  $(3, 1)$ ) 的四维洛伦兹流形。洛伦兹流形的度量指标使得其上的切向量可以分为类时的 (timelike)、类空 (spacelike) 和类光的 (lightlike), 其中, 类光的向量也被称为零矢量 (null vector)。

**定义 5.2.7 (类时、类空和类光切向量)** 设  $(M, g)$  是一个洛伦兹流形, 对  $\forall X_p \in T_p M$ , 若  $g(X_p, X_p) > 0$ , 则称  $X_p$  是类时的; 若  $g(X_p, X_p) < 0$ , 则称  $X_p$  是类空的; 若  $g(X_p, X_p) = 0$ , 则称  $X_p$  是类光的。

就像欧氏空间  $R^n$  是黎曼流形的重要例子一样, 具有平坦闵可夫斯基度量的闵可夫斯基空间 (Minkowski space)  $R^{1,3}$  是刻画洛伦兹流形的一个重要例子。

**定义 5.2.8 (闵可夫斯基空间)** 四维的洛伦兹流形称为闵可夫斯基空间, 记为  $R^{1,3}$ 。

闵可夫斯基空间也称为闵可夫斯基时空。在爱因斯坦建立狭义相对论之后, 俄裔德国数学家闵可夫斯基 (H. Minkowski, 1864—1909 年) 认为应将时间和空间统一处理, 事件是发生在一个四维的时空中。事实表明, 闵可夫斯基空间是表述狭义相对论最合适的空间。闵可夫斯基是物理学家爱因斯坦的老师。后来, 爱因斯坦也认识到闵可夫斯基空间的重要性。

闵可夫斯基空间  $R^{1,3}$  常用的标准基底 (standard basis) 是 4 个互相正交的向量构成的集合  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , 满足:

$$-g(e_0, e_0) = g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

和

$$g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j$$

这样，闵可夫斯基空间  $R^{1,3}$  的度量系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.15)$$

在标准基底  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  下，对  $\forall v \in R^{1,3}$ ，有  $v = v^i e_i$ 。这样， $\forall v, w \in R^{1,3}$ ，有：

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(v^i e_i, w^j e_j) = g(v^i e_i, w^j e_j) = v^i w^j g(e_i, e_j) \\ &= -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

自然有

$$g(v, v) = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \quad (5.2.17)$$

称其为  $v$  的模 (norm) 或大小 (magnitude)。

闵可夫斯基空间是狭义相对论的模型空间，它是平坦的几何空间。一个闵可夫斯基时空中一事件的所有零矢量的集合构成了该事件的光锥 (light cone)。严格来说，闵可夫斯基空间可以用来刻画没有显著重力影响的有限距离物理系统。当有显著重力影响存在时，时空会发生弯曲。此时，需要由狭义相对论转而选用广义相对论。但即使如此，闵可夫斯基空间仍然具有适用性。因为四维弯曲时空中任一点处的切空间是一个四维闵可夫斯基空间。

黎曼几何的一些基本定理可以推广到伪黎曼流形上去。例如，5.4 节中的黎曼几何基本定理在伪黎曼流形上也是成立的。另一方面，黎曼几何中的许多定理在推广的流形上是不成立的。例如，“在任一个光滑流形上都可以指定一个给定度量指标的伪黎曼度量”是不对的，因为其中存在一些拓扑障碍。一个子流形也并不总能继承伪黎曼流形的结构。例如，类光曲线上的度量张量总是零。尽管 Clifton-Pohl 环面 (Clifton-Pohl torus) 是一个紧致的洛伦兹流形，但它却不是测地完备的。这与黎曼流形上的霍普夫-林诺定理 (Hopf-Rinow theorem) 是不一致的。

## 附录 5.2 爱因斯坦、广义相对论与黎曼几何

爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955 年) (图 5.2.1)，美国犹太裔物理学家，被公认为是继伽利略、牛顿以后最伟大的物理学家。

1879 年，他出生于德国的一个犹太人家庭。1900 年，毕业于苏黎世联邦理工学院。1905 年，获苏黎世大学哲学博士学位。1908 年，创立狭义相对论。1915 年，创立广义相对论。1921 年，爱因斯坦因其提出的光子假设成功解释光电效应而获得诺贝尔物理学奖。

作为一位伟大的物理学家，爱因斯坦与几何学有着密不可分的联系。在他 12 岁时，爱因斯坦就自学了欧几里德几何。后来提及这段经历时，他说：“几何学的这种明晰性和可靠性给我留下了一种难以形容的印象。”同时开始自学解析几何。

物理的理论创新需要合适的数学作为表达的语言和推导的工具。从 1908 年创立狭义相对



论到 1915 年创立广义相对论，爱因斯坦花了 7 年时间。他曾经说过：“为什么还需要 7 年才能建立广义相对论呢？主要原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接尺度意义这一概念中解脱出来。”在 1922 年的日本京都演说中，爱因斯坦说：“如果所有的系统都是等价的，那么欧氏几何就无法全部成立。但是舍几何而就物理，就好像失语的思考。我们表达思想之前必须要找到语言，……。我突然发现高斯的曲面论正是解开这个奥秘的钥匙……，我不知道黎曼已经深刻地研究了几何的基础。”

爱因斯坦的大学同学、几何学家格罗斯曼 (M. Grossmann, 1878—1936 年) (图 5.2.2) 在广义相对论的创立过程中发挥了重要作用。他向爱因斯坦强调了黎曼几何这一非欧几何对建构广义相对论的重要性。格罗斯曼 (如图 5.2.2 所示) 还把张量分析和绝对微分学等介绍给爱因斯坦，帮助爱因斯坦实现了从狭义相对论到广义相对论的突破。1913 年，爱因斯坦和格罗斯曼合著的《广义相对论和引力论纲要》(*Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*) 是爱因斯坦广义相对论的两篇基础论文中的一篇。

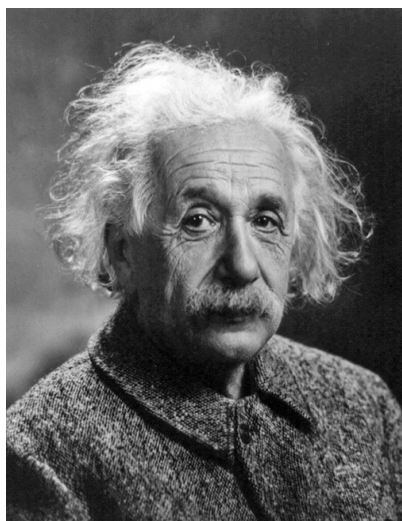


图 5.2.1 爱因斯坦



图 5.2.2 格罗斯曼

爱因斯坦因得到黎曼几何这一数学工具的支撑而实现了由狭义相对论到广义相对论的跨越，而黎曼几何也因广义相对论找到了应用的背景和发展的动力。这反映出的是微分几何与物理之间的一种殊途同归、相辅相成的关系。微分几何学的理论发展有时会领先于物理的实际问题背景，这样就会给物理学中的一些问题解决准备好数学工具；反过来，这种理论的实际应用、物理学发展中不断涌现的对几何学理论发展的需求又刺激、推动了微分几何学的发展。这种关系在多年后被物理学中的杨-米尔斯场论和微分几何学中的纤维丛联络理论所再次印证。人们会惊叹于数学家获得的看似脱离实际的纯理论研究成果。例如，物理学家杨振宁 (1922 年—) 曾说过：“非交换的规范场与纤维丛这个美妙理论——数学家们发展它时并没有参考物理世界——在概念上的一致，对我来说是一个奇迹。”陈省身先生在《微分几何与理论物理》一文中写道：“广义相对论所需要的黎曼几何和规范场论所需要的纤维空间内的联络，都在物理应用前为数学家所发展，这个‘殊途同归’的现象真令人有神秘之感。”在《几何中的非线性分析》中，著名数学家丘成桐表达了自己对这一现象的感想：“也许，几何同物理一样的实在。在历史上，几何学家从几何自身的美出发而考虑的许多问题后来都在物理学中自

然产生,这件事常常使几何学家同物理学家都感到吃惊。似乎当大自然通过数学来表现她自身美的时候,她也通过它显示她的深邃性。”

## 5.3 外微分式及外微分

外微分式和活动标架是微分几何中的两个重要工具。在第2章中,我们讨论过向量空间上的 $r$ 次外形式。本节将在第2章的基础之上研究流形的切空间上的 $r$ 次外微分式及其外微分运算。

### 5.3.1 外微分式

**定义 5.3.1 ( $r$ 次外微分式)** 设 $M$ 为一个 $m$ 维的光滑流形,称其上的一个光滑的反对称的 $r$ 阶协变张量场为光滑流形 $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式( $r$ -differential form)。用 $A^r(M)$ 表示光滑流形 $M$ 上的所有 $r$ 次外微分式构成的集合。 $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式 $\omega$ 记为 $\omega \in A^r(M)$ 。

对 $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式 $\omega$ 可以从整体和局部两个角度理解。从整体上来看,它是从流形 $M$ 的 $r$ 个光滑切向量场空间的直积空间 $X(M) \times \cdots \times X(M)$ 到流形 $M$ 上的光滑函数集合 $C^\infty(M)$ 的一个映射:

$$\omega: \overbrace{X(M) \times \cdots \times X(M)}^{r\uparrow} \rightarrow C^\infty(M)$$

限制在流形 $M$ 上的一点 $p$ 来看,它是从流形 $M$ 在点 $p$ 处的 $r$ 个切空间 $T_p M$ 构成的直积空间 $T_p M \times \cdots \times T_p M$ 到实数集 $R$ 的映射:

$$\omega(p): \underbrace{T_p(M) \times \cdots \times T_p(M)}_{r\uparrow} \rightarrow R$$

设 $p$ 是流形 $M$ 上的任一点,在点 $p$ 处建立流形 $M$ 的一个局部坐标系 $(U; x^i)$ ,则有点 $p$ 处的自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 和对偶标架场 $\{dx^i\}$ 。这样, $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式 $\omega$ 也可看作多重线性函数空间 $L(X(M), \cdots, X(M); R)$ 中的一个元素。而多重线性函数空间 $L(X(M), \cdots, X(M); R)$ 可理解为由 $r$ 个一次外微分式空间 $A^1(M)$ 构成的张量空间。因此, $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式 $\omega$ 在坐标邻域 $U$ 上有如下分量表示:

$$\begin{aligned} \omega|_U &= \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

式中,  $\omega_{i_1 \cdots i_r} = \omega|_U \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right)$ 。

定义 5.3.1 中 $r$ 次外微分式 $\omega$ 的光滑性就是指 $\omega$ 在坐标邻域 $U$ 上的分量 $\omega_{i_1 \cdots i_r}$ 的光滑性,即 $\omega_{i_1 \cdots i_r} \in C^\infty(U)$ 。

下面来讨论定义 5.3.1 中外微分式次数的可取数。设 $M$ 为一个 $m$ 维的光滑流形,考虑 $m$

维光滑流形  $M$  在点  $p$  处的一个局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $\{dx^i, \dots, dx^n\}$  为在点  $p$  处余切空间  $T_p^*M$  的基底。由外积运算的反对称性可得:

$$dx^{i_k} \wedge dx^{i_k} = -dx^{i_k} \wedge dx^{i_k} \quad (5.3.2)$$

所以, 有:

$$dx^{i_k} \wedge dx^{i_k} = 0 \quad (5.3.3)$$

由此可知: 对光滑流形  $M$  上的一个  $r$  次外微分式  $\alpha$ , 当  $r > n = \dim M$  时, 必有  $\alpha = 0$ 。所以, 外微分式的次数不会超过流形  $M$  的维数, 即有  $r \leq \dim M$ 。

另外, 约定光滑流形  $M$  上的 0 次外微分式就是光滑流形  $M$  上的光滑函数, 即  $A^0(M) = C^\infty(M)$ 。

从光滑流形  $M$  上的一点  $p$  处看, 流形  $M$  上的一个  $r$  次外微分式就是  $M$  在点  $p$  处切向量空间  $T_p M$  中的  $r$  次外形式。已经在 2.4 节讨论过向量空间上的  $r$  次外形式的加法、乘法、外积运算, 所以, 只要采取局部到整体的方法, 不难得到流形  $M$  上的一个  $r$  次外微分式的加法、 $C^\infty(M)$  乘法、外积等运算。由此, 可以获得  $m$  维光滑流形  $M$  上外代数  $A(M)$ , 即由流形  $M$  上的 0 次到  $r$  次外微分式构成的集合, 并且其上包含加法、乘法、外积运算, 即:

$$A(M) = \bigoplus_{r=0}^m A^r(M)$$

### 5.3.2 外微分

下面引入外微分式之间的一种重要运算——外微分 (exterior differential)。

**定义 5.3.2(外微分)** 设  $A(M)$  为  $n$  维光滑流形  $M$  上的外代数, 若映射  $d: A(M) \rightarrow A(M)$  将流形  $M$  上的  $r$  次外微分式映射为  $M$  上的  $r+1$  次外微分式, 且满足:

(1) 对  $\forall \alpha, \beta \in A(M)$ , 有:

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta \quad (5.3.4)$$

(2) 对  $\forall \alpha \in A(M)$ ,  $\beta \in A^r(M)$ , 有:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta \quad (5.3.5)$$

(3) 对  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,  $df$  是  $f$  的微分;

(4) 对  $\forall \alpha \in A(M)$ , 有:

$$d^2\alpha = d(d\alpha) = 0 \quad (5.3.6)$$

则称  $d$  为外代数  $A(M)$  上的外微分或外微分算子 (exterior differential operator)。

也称式 (5.3.6) 为外微分满足庞加莱引理 (Poincaré Lemma)。它在代数拓扑中有相应的解释。在代数拓扑中,  $d$  也被称为是上边缘算子。在 6.4 节中, 将进一步讨论与外微分有关的闭的外微分式、恰当的外微分式和德拉姆上同调群等。

由定义 5.3.2 可得如下结论。

**定理 5.3.1** 对  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ , 则有:

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg \quad (5.3.7)$$

对  $\forall \alpha, \beta \in A^1(M)$ , 则有:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta \quad (5.3.8)$$

设  $p$  是流形  $M$  上的任一点, 在点  $p$  处建立流形  $M$  的一个局部坐标系  $(U; x^i)$ , 则流形  $M$  上的  $r$  次外微分式  $\alpha$  有如下分量表示:

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (5.3.9)$$

所以, 在局部坐标邻域  $U$  上, 有:

$$\begin{aligned} d\alpha|_U &= \frac{1}{r!} d\alpha_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in A^{r+1}(U) \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

为了解定义 5.3.2 中要求 (1) ~ (4) 的合理性, 可用单项式加以验证说明。设  $\alpha$  为流形  $M$  上的  $r$  次单项式, 其在坐标邻域  $U$  上的分量表示为:

$$\alpha|_U = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

其中  $f \in C^\infty(U)$ 。对其进行外微分有:

$$d\alpha|_U = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (5.3.11)$$

定义 5.3.2 中要求 (1) 和 (3) 成立是较为自然的, 容易理解。下面来考查 (2) 和 (4)。

设  $\beta|_U = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \in A^s(U)$  为坐标邻域  $U$  上的  $s$  次单项式, 则:

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= [(df) \cdot g + f dg] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &\quad + (-1)^r (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

据此可知, 定义 5.3.2 中要求 (2) 成立是合理的。

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= d(d\alpha) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

交换式 (5.3.13) 的求和指标  $i$  和  $j$ , 有:

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

利用式 (5.3.13) 和式 (5.3.14):

$$d^2\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (5.3.15)$$

而  $f \in C^\infty(U)$ , 所以有  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ 。因此,  $d^2\alpha = 0$ 。再由  $\alpha$  的任意性可知:  $d^2 = 0$ 。据此可知, 定义 5.3.2 中要求 (4) 成立也是合理的。

**【例 5.3.1】** 设  $f, h$  是  $R^2$  上的两个光滑函数, 则:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ dh &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} df \wedge dh &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge \left( \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} dy \wedge dx \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} dx \wedge dy \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

**【例 5.3.2】** 设  $\omega = ydx + xzdy + y^2zdz$ ,  $\eta = xdx + ydy + zdz$ , 求  $d\omega \wedge \eta$ 。

解: 因为

$$\begin{aligned} d\omega &= dy \wedge dx + zdx \wedge dy + xdz \wedge dy + 2yzdy \wedge dz \\ &= (z-1)dx \wedge dy + (2yz-x)dy \wedge dz \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega \wedge \eta &= [(z-1)dx \wedge dy + (2yz-x)dy \wedge dz] \wedge (xdx + ydy + zdz) \\ &= (z^2-z)dx \wedge dy \wedge dz + (2xyz-x^2)dy \wedge dz \wedge dx \\ &= (z^2-z)dx \wedge dy \wedge dz + (2xyz-x^2)dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (z^2-x^2-z+2xyz)dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

**【例 5.3.3】** 计算  $z^2dx \wedge dy + (z^2+2y)dx \wedge dz$  的外微分。

解: 根据外积的运算性质, 有:

$$\begin{aligned} &d[z^2dx \wedge dy + (z^2+2y)dx \wedge dz] \\ &= 2zdz \wedge dx \wedge dy + 2zdz \wedge dx \wedge dz + 2dy \wedge dx \wedge dz \\ &= (2z-2)dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

下面来研究外微分式的外微分在坐标变换下的表现。设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^j)$  为  $m$  维光滑流形  $M$  在点  $p$  处的两个局部坐标系,  $\alpha$  为流形  $M$  上的一个  $r$  次外微分式, 在局部坐标邻域  $U$  和  $V$  上的分量表示为:

$$\alpha|_U = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (5.3.19)$$

和

$$\alpha|_V = \frac{1}{r!} \alpha_{j_1 \cdots j_r} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_r} \quad (5.3.20)$$

当  $U \cap V \neq \emptyset$  时, 在容许参数变换  $y^j = y^j(x^1, \cdots, x^n)$ ,  $1 \leq j \leq n$  下 (即雅克比行列式  $\frac{\partial(y^1, \cdots, y^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)} \neq 0$ ), 有:

$$\begin{aligned} \alpha|_{U \cap V} &= \frac{1}{r!} \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_r} = \frac{1}{r!} \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} \left( \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

所以, 比较式 (5.3.19) 和式 (5.3.21) 的系数可得外微分式在不同坐标邻域下的系数关系式:

$$\alpha_{i_1 \cdots i_r} = \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \quad (5.3.22)$$

当  $U \cap V \neq \emptyset$  时, 有:

$$\alpha|_{U \cap V} = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

对其进行外微分, 并利用式 (5.3.22), 有:

$$\begin{aligned} d(\alpha|_{U \cap V}) &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \alpha_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r}}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \\ &\quad + \frac{1}{r!} \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r} \sum_{k=1}^r \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial^2 y^{j_k}}{\partial x^{i_k} \partial x^i} \cdots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

因为

$$\frac{\partial^2 y^{j_k}}{\partial x^{i_k} \partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_k} = \frac{\partial^2 y^{j_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} dx^{i_k} \wedge dx^i = -\frac{\partial^2 y^{j_k}}{\partial x^{i_k} \partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_k} \quad (5.3.24)$$

所以, 有:

$$\frac{\partial^2 y^{j_k}}{\partial x^{i_k} \partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_k} = 0 \quad (5.3.25)$$

从而, 有:

$$\begin{aligned} d(\alpha|_{U \cap V}) &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r}}{\partial y^j} \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \left( \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{j_1 \cdots j_r}}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_r} \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

由此可以获得外微分式外微分的形式不变性。

定理 5.3.2 若  $\alpha_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}(y^1, \dots, y^n) dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r}$ , 则必有:

$$d\alpha_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = d\tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}(y^1, \dots, y^n) \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_r} \quad (5.3.27)$$

该性质是多元函数全微分形式不变性的推广: 若

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}(y^1, \dots, y^n) &= \tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)) \\ &= \alpha_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} dx^i &= d\alpha_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) \\ &= d\tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}(y^1, \dots, y^n) \\ &= \frac{\partial \tilde{\alpha}_{j_1 \dots j_r}}{\partial y^j} dy^j \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

定理 5.3.3 (外微分的求值公式) 设  $\omega \in A^1(M)$ , 则对  $\forall X, Y \in X(M)$ , 有:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (5.3.30)$$

证明: 因为该式两边对  $\omega$  都是线性的, 所以不妨设  $\omega$  为单项式:  $\omega = f dh$ . 先计算式 (5.3.30) 的左边, 有:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= df \wedge dh(X, Y) = \begin{vmatrix} \langle df, X \rangle & \langle df, Y \rangle \\ \langle dh, X \rangle & \langle dh, Y \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X(f) & Y(f) \\ X(h) & Y(h) \end{vmatrix} = X(f) \cdot Y(h) - X(h) \cdot Y(f) \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

再计算式 (5.3.30) 右边的各项, 有:

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) &= X(f \cdot dh(Y)) = X(fY(h)) \\ &= X(f) \cdot Y(h) + f \cdot XY(h) \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

$$Y(\omega(X)) = Y(f) \cdot X(h) + f \cdot YX(h) \quad (5.3.33)$$

$$\omega([X, Y]) = f \cdot dh(XY - YX) = f \cdot XY(h) - f \cdot YX(h) \quad (5.3.34)$$

所以, 利用式 (5.2.32) ~ 式 (5.2.34) 可知,

$$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = X(f) \cdot Y(h) - Y(f) \cdot X(h) \quad (5.3.35)$$

由此可知式 (5.3.30) 成立。证毕。

定理 5.3.3 可推广到  $r$  次外微分式上去。

定理 5.3.4 设  $\omega$  为光滑流形  $M$  上的  $r$  次外微分式, 则对  $\forall X_1, \dots, X_{r+1} \in X(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k+1} X_k(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < l \leq r+1} (-1)^{k+l} \omega([X_k, X_l], X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{r+1}) \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

证明: 令式 (5.3.36) 的右端等于  $\alpha(X_1, \dots, X_{r+1})$ , 则可以证明:

$$\alpha: \underbrace{X(M) \times \dots \times X(M)}_{r+1} \rightarrow C^\infty(M)$$

为  $C^\infty(M)$  线性的  $r+1$  重线性映射。所以,  $\alpha \in A^{r+1}(M)$ 。

下面只要证明  $d\omega = \alpha$ 。考虑  $n$  维光滑流形  $M$  在点  $p$  处的一个局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $\omega$  限制在  $U$  上的分量表示为:  $\omega|_U = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$ 。那么, 它的外微分限制在  $U$  上的分量表示为:

$$d\omega|_U = \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (5.3.37)$$

另一方面, 有

$$d\omega|_U = \frac{1}{(r+1)!} (d\omega|_U)_{j_1 \dots j_{r+1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r+1}} \quad (5.3.38)$$

其中

$$\begin{aligned} (d\omega|_U)_{j_1 \dots j_{r+1}} &= (d\omega|_U) \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} \delta_{j_1 \dots j_{r+1}}^{i_1 \dots i_r} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_{r+1}}}{\partial x^{j_k}} \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

又注意到

$$\alpha|_U = \frac{1}{(r+1)!} \alpha_{j_1 \dots j_{r+1}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{r+1}} \quad (5.3.40)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{j_1 \dots j_{r+1}} &= \alpha \left|_U \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) \right. \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \left( \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{j_k}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < l \leq r+1} (-1)^{k+l} \omega \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \right], \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{j_k}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x^{j_l}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k+1} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_{r+1}}}{\partial x^{j_k}} \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

对比式 (5.3.39) 和式 (5.3.41) 可知:  $d\omega|_U = \alpha|_U$ 。证毕。

### 5.3.3 流形间光滑映射的诱导映射

下面引入流形间映射的诱导映射的概念, 并研究它与外微分的可交换性。

**定义 5.3.3 (流形间光滑映射的诱导映射)** 设  $M$  和  $N$  是两个光滑流形, 其维数分别为  $m$  和  $n$ 。设  $f: M \rightarrow N$  为流形  $M$  和  $N$  间的一个光滑映射,  $p$  为流形  $M$  上的一点, 有余切映射:

$$f^*: T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$$



由此可定义映射

$$f^*: A^r(N) \rightarrow A^r(M), \quad \beta \rightarrow f^*\beta$$

使得对  $\forall X_1, \dots, X_r \in X(M)$ , 有:

$$f^*\beta(X_1, \dots, X_r) = \beta(f_*X_1, \dots, f_*X_r) \quad (5.3.42)$$

称其为流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射  $f$  的诱导映射 (induced mapping)。

通过验证, 不难发现诱导映射有如下性质:

(1) 设  $\beta \in A^0(N) = C^\infty(N)$ , 则

$$f^*\beta = \beta \circ f \in C^\infty(M) = A^0(M) \quad (5.3.43)$$

(2) 设  $\omega, \eta \in A(N)$ , 则

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta \quad (5.3.44)$$

即  $f^*$  与外积运算可交换。

特别地, 对  $g, h \in A^0(N)$ , 有:

$$f^*(g \cdot h) = f^*g \cdot f^*h = (g \circ f) \cdot (h \circ f) \quad (5.3.45)$$

**【例 5.3.4】** 在极坐标系  $x = \rho(\theta)\cos\theta$ ,  $y = \rho(\theta)\sin\theta$  中写出  $\omega = \sqrt{x^2 + y^2}(xdx + ydy)$ 。

解: 由

$$\begin{aligned} dx &= (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)d\theta \\ dy &= (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)d\theta \end{aligned}$$

可得

$$\omega = \rho^2(\theta)\rho'(\theta)d\theta$$

**【例 5.3.5】** 设  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 光滑映射  $f: R^2 \rightarrow R^2$  的定义为:

$$f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$$

求  $f^*\omega$ 。

解: 根据题意有  $x = e^u \cos v$ ,  $y = e^u \sin v$ , 所以:

$$\begin{aligned} f^*dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = e^u \cos v du - e^u \sin v dv \\ f^*dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv = e^u \sin v du + e^u \cos v dv \end{aligned}$$

这样,

$$\begin{aligned} f^*\left(\frac{xdy}{x^2 + y^2}\right) &= \frac{e^u \cos v}{e^{2u}}(e^u \sin v du + e^u \cos v dv) \\ &= \cos v \sin v du + \cos^2 v dv \\ f^*\left(\frac{ydx}{x^2 + y^2}\right) &= \frac{e^u \sin v}{e^{2u}}(e^u \cos v du - e^u \sin v dv) \\ &= \cos v \sin v du - \sin^2 v dv \end{aligned}$$

所以,

$$f^*\omega = dv \quad (5.3.46)$$

【例 5.3.6】 设  $\omega = xdx \wedge dy + ydx \wedge dz$ , 光滑映射  $f: R^2 \rightarrow R^3$  的定义为:

$$f(u, v) = (u^2 + v, v, 3uv)$$

求  $f^*\omega$ 。

解: 根据题意有  $x = u^2 + v$ ,  $y = v$ ,  $z = 3uv$ , 所以:

$$f^*dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = 2u du + dv \quad (5.3.47)$$

$$f^*dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = dv \quad (5.3.48)$$

$$f^*dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = 3v du + 3u dv \quad (5.3.49)$$

这样, 利用式 (5.3.47) ~ 式 (5.3.49), 有:

$$f^*(dx \wedge dy) = (f^*dx) \wedge (f^*dy) = 2u du \wedge dv \quad (5.3.50)$$

$$f^*(dx \wedge dz) = (f^*dx) \wedge (f^*dz) = (6u^2 - 3v) du \wedge dv \quad (5.3.51)$$

从而

$$\begin{aligned} f^*\omega &= (u^2 + v) f^*(dx \wedge dy) + v f^*(dx \wedge dz) \\ &= (u^2 + v) 2u du \wedge dv + v(6u^2 - 3v) du \wedge dv \\ &= (2u^3 + 2uv + 6u^2v - 3v^2) du \wedge dv \end{aligned} \quad (5.3.52)$$

**定理 5.3.5** ( $f^*$  与  $d$  的可交换性) 设  $f: M \rightarrow N$  为光滑流形  $M$  和  $N$  间的光滑映射, 则诱导映射  $f^*: A^r(N) \rightarrow A^r(M)$  与外微分可交换, 即:

$$f^* \cdot d = d \circ f^*: A(N) \rightarrow A(M) \quad (5.3.53)$$

即成立如图 5.3.1 所示的交换图:

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{d} & A(N) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ A(M) & \xrightarrow{d} & A(M) \end{array}$$

图 5.3.1 交换图

要反映外微分式次数的变化, 可用如图 5.3.2 所示的更为详尽的交换图表示:

$$\begin{array}{ccc} A^r(N) & \xrightarrow{d} & A^{r+1}(N) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ A^r(M) & \xrightarrow{d} & A^{r+1}(M) \end{array}$$

图 5.3.2 更为详尽的交换图

**证明:** 用数学归纳法加以证明。先考虑 0 次外微分式即流形上的光滑函数的情形。设  $\beta \in A^0(N) = C^\infty(N)$ 。对  $\forall X \in X(M)$ , 有:

$$\begin{aligned}
(f^*d\beta)(X) &= \langle X, f^*d\beta \rangle \\
&= \langle f_*X, d\beta \rangle = (f_*X)(\beta) = X(\beta \circ f) \\
&= \langle X, d(\beta \circ f) \rangle = \langle X, d(f^*\beta) \rangle \\
&= (d \circ f^*\beta)(X)
\end{aligned} \tag{5.3.54}$$

由  $X$  的任意性可知:

$$f^*d\beta = df^*\beta \tag{5.3.55}$$

接着考虑一次外微分式的情形。因为  $f^*$  和  $d$  都是线性的, 所以只需考虑对单项式的作用。设  $\beta = gdh \in A^1(N)$ , 其中  $f, g \in C^\infty(N)$ , 有:

$$\begin{aligned}
f^*d\beta &= f^*(dg \wedge dh) = (f^*dg) \wedge (f^*dh) \\
&= (df^*g) \wedge (f^*dh) = d(f^*g \cdot (f^*dh)) \\
&= d(f^*(gdh)) = df^*\beta
\end{aligned} \tag{5.3.56}$$

假设定理的结论对次数小于  $r$  的外微分式都成立, 则当  $\beta \in A^r(N)$  时, 不妨设:

$$\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$$

其中  $\beta_1 \in A^1(N)$ ,  $\beta_2 \in A^{r-1}(N)$ 。所以, 有:

$$\begin{aligned}
f^*d\beta &= f^*d(\beta_1 \wedge \beta_2) = f^*(d\beta_1 \wedge \beta_2 - \beta_1 \wedge d\beta_2) \\
&= (f^*d\beta_1) \wedge (f^*\beta_2) - (f^*\beta_1) \wedge (f^*d\beta_2) \\
&= d(f^*\beta_1) \wedge (f^*\beta_2) - (f^*\beta_1) \wedge d(f^*\beta_2) \\
&= d((f^*\beta_1) \wedge (f^*\beta_2)) \\
&= d(f^*(\beta_1 \wedge \beta_2)) = df^*\beta
\end{aligned} \tag{5.3.57}$$

综上所述,  $f^*d = df^*$ 。证毕。

## 5.4 仿射联络和列维-齐维塔联络

微分流形的概念产生以后, 人们自然希望讨论其几何特性、开展分析工作。其中重要的一环就是要在流形上建立导数的概念。相比欧氏空间而言, 这个工作要更抽象困难, 而且人们要求得到的也更多——对向量场求导。因此联络概念应运而生。黎曼流形上的列维-齐维塔联络为流形上分析工作的开展奠定了基础。在本节中, 我们先在光滑流形上引入仿射联络, 然后引入黎曼流形上列维-齐维塔联络。同时, 还将讨论挠率张量、挠率形式和协变微分等。

### 5.4.1 仿射联络和仿射联络空间

从本质上讲, 仿射联络是将光滑流形上临近点处的切空间联系起来的附加结构, 从而使得流形上的光滑切向量场像流形上的光滑函数一样可以进行求导运算。曲面理论和张量分析是仿射联络发展的两个源泉。20 世纪 20 年代, 嘉当将仿射联络作为其联络一般理论的一部分, 而德国数学家外尔 (H. K. H. Weyl, 1885—1955 年) 则将其作为他在相对论工作基础的一部分。

**定义 5.4.1 (仿射联络)** 设  $M$  为光滑流形, 若流形  $M$  上的映射:

$$\nabla: X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$$

$$(X, Y) \mapsto D_X Y$$

满足: 对  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ,  $f, h \in C^\infty(M)$ , 有:

$$(1) \quad \nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z, \quad (5.4.1)$$

$$(2) \quad \nabla_X (fY + hZ) = X(f)Y + f\nabla_X Y + X(h)Z + h\nabla_X Z, \quad (5.4.2)$$

则称  $\nabla$  为流形  $M$  上的仿射联络 (affine connection)。称  $\nabla_X Y$  为  $Y$  关于  $X$  的协变导数 (covariant derivative) 或共变导数。称指定了仿射联络的光滑流形  $M$  为仿射联络空间, 记为  $(M, \nabla)$ , 简记为  $M$ 。

定义 5.4.1 中的式 (5.4.2) 可替换为:  $\forall \lambda \in R$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , 有:

$$\nabla_X (Y + \lambda Z) = \nabla_X Y + \lambda \nabla_X Z \quad (5.4.3)$$

和

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad (5.4.4)$$

可以利用活动标架对联络加以计算。设  $(U, \varphi)$  为流形  $M$  在点  $p$  处的坐标卡,  $\{e_i\}$  和  $\{\omega^i\}$  分别为流形  $M$  在点  $p$  处的标架场和对偶标架场, 则对  $\forall X = X^i e_i \in X(M)$ , 有:

$$\omega^i(X) = X^j \omega^i(e_j) = X^j \delta_j^i = X^i \quad (5.4.5)$$

所以,

$$X = \omega^i(X) e_i \quad (5.4.6)$$

对  $\forall X, Y \in X(M)$ , 根据式 (5.4.2), 有:

$$\nabla_X Y = \nabla_X (\omega^i(Y) e_i) = X(\omega^i(Y)) e_i + \omega^i(Y) \nabla_X e_i \quad (5.4.7)$$

观察式 (5.4.7) 可知: 只要给定  $\nabla_X e_i$ , 就决定了  $\nabla_X Y$ 。作为切向量场,  $\nabla_X e_i$  可表示为:

$$\nabla_X e_i = \omega_i^j(X) e_j \quad (5.4.8)$$

其中  $\omega_i^j: X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  是 1-形式。作为 1-形式,  $\omega_i^j$  可被对偶标架场  $\{\omega^i\}$  所线性表出:

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j \omega^k \quad (5.4.9)$$

推导可得

$$\omega_j^i(e_k) = \Gamma_{ij}^i \omega^l(e_k) = \Gamma_{ij}^i \delta_k^l = \Gamma_{kj}^i \quad (5.4.10)$$

所以, 利用式 (5.4.8), 有:

$$\nabla_{e_i} e_j = \omega_j^k(e_i) e_k = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (5.4.11)$$

**定义 5.4.2 (仿射联络系数)** 设  $M$  为光滑流形,  $\nabla$  为流形  $M$  上的仿射联络,  $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$ , 称  $\Gamma_{ij}^k$  为仿射联络系数 (coefficients of affine connection)。

下面在自然标架场下讨论。设  $(U; x^i)$  是流形  $M$  在  $p$  点附近的一个局部坐标系。在自然标架场  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  下, 利用式 (5.4.1) 和式 (5.4.2) 可得:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= X^i \left( \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^k \Gamma_{ik}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

## 5.4.2 挠率张量和挠率形式

**定义 5.4.3 (挠率张量)** 设  $\nabla$  为微分流形  $M$  上的仿射联络,  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ , 令:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{5.4.13}$$

称映射  $T: X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$  为仿射联络  $\nabla$  的挠率张量 (torsion tensor)。若  $T \equiv 0$ , 则称联络  $\nabla$  是无挠的 (torsion-free) 或对称的 (symmetry)。

$T$  是仿射联络空间  $(M, \nabla)$  上的一个光滑的 (1,2) 型张量场。利用式 (5.4.13), 不难证明挠率张量具有如下性质: 对  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , 有:

$$(1) \quad T(X, Y) = -T(Y, X) \tag{5.4.14}$$

$$(2) \quad T(X + Y, Z) = T(X, Z) + T(Y, Z) \tag{5.4.15}$$

$$(3) \quad T(fX, Y) = fT(X, Y) \tag{5.4.16}$$

也就是说挠率  $T$  是  $C^\infty(M)$  双线性的, 并且是反对称的。

下面从分量的角度来研究仿射联络的挠率。

**定义 5.4.4 (挠率形式)** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间, 因为  $T(X, Y) \in X(M)$ , 所以  $T(X, Y)$  可由局部标架场  $\{e_i\}$  线性表出:

$$T(X, Y) = T^i(X, Y) e_i \tag{5.4.17}$$

式中,  $T^i: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  是 2 次形式, 称其为联络  $\nabla$  的挠率形式 (torsion form)。

因为挠率形式  $T^i$  为 2 次形式, 所以可由 2 次形式的基底  $\{\omega^j \wedge \omega^k\}$  表出, 即:

$$T^i = \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \tag{5.4.18}$$

式中,  $T_{jk}^i$  为挠率张量  $T$  的分量。

挠率张量  $T$  的分量关于下指标是反对称的  $T_{jk}^i$ 。事实上, 有如下定理:

**定理 5.4.1** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间,  $T_{jk}^i$  为挠率张量的分量, 则:

$$T_{jk}^i = -T_{kj}^i \tag{5.4.19}$$

**证明:** 交换式 (5.4.18) 中的求和坐标  $j$  和  $k$ , 并利用外微分的反对称性, 有:

$$\begin{aligned}
T^i &= \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k = \frac{1}{2} T_{kj}^i \omega^k \wedge \omega^j \\
&= -\frac{1}{2} T_{kj}^i \omega^j \wedge \omega^k
\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

因而, 有

$$(T_{jk}^i + T_{kj}^i)\omega^j \wedge \omega^k = 0 \quad (5.4.21)$$

因为  $\omega^j \wedge \omega^k$  为 2 次外微分式空间的基底元素, 所以它们是线性无关的。所以, 有式 (5.4.19) 成立。证毕。

**定理 5.4.2** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间,  $T^i$  为  $\nabla$  的挠率形式,  $\{\omega^i\}$  为对偶标架场, 有:

$$T^i = d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k \quad (5.4.22)$$

**证明:** 对  $\forall X \in X(M)$ , 有  $X = X^i e_i = \omega^i(X) e_i$ ,  $\nabla_X e_i = \omega_i^k(X) e_k$ 。利用式 (5.4.13), 有:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X (\omega^i(Y) e_i) - \nabla_Y (\omega^i(X) e_i) - \omega^i([X, Y]) e_i \\ &= X(\omega^i(Y)) e_i + \omega^i(Y) \nabla_X e_i - Y(\omega^i(X)) e_i \\ &\quad - \omega^i(X) \nabla_Y e_i - \omega^i([X, Y]) e_i \\ &= d\omega^i(X, Y) e_i + \omega^i(Y) \nabla_X e_i - \omega^i(X) \nabla_Y e_i \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

根据外积的运算性质, 有:

$$\begin{aligned} \omega^i(Y) \nabla_X e_i - \omega^i(X) \nabla_Y e_i &= \omega^i(Y) \omega_i^k(X) e_k - \omega^i(X) \omega_i^k(Y) e_k \\ &= \omega_i^k \wedge \omega^i(X, Y) e_k \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

将式 (5.4.24) 代入式 (5.4.23), 有:

$$T(X, Y) = d\omega^i(X, Y) e_i + \omega_k^i \wedge \omega^k(X, Y) e_i \quad (5.4.25)$$

利用式 (5.4.17) 和式 (5.4.25), 并根据  $X$  和  $Y$  的任意性可得式 (5.4.22)。证毕。

**定理 5.4.3** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间,  $T_{jk}^i$  为挠率张量的分量, 则在自然标架场  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$

下, 有:

$$T_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i \quad (5.4.26)$$

**证明:** 在自然标架场  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  下, 有  $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\omega^i = dx^i$ ,  $\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \omega^k = \Gamma_{kj}^i dx^k$ 。利用式 (5.4.22),

有:

$$\begin{aligned} T^i &= d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = d(dx^i) + \Gamma_{kj}^i dx^k \wedge dx^j \\ &= \Gamma_{kj}^i dx^k \wedge dx^j \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

交换式 (5.4.27) 中的求和坐标  $j$  和  $k$ , 并利用外微分的反对称性, 有:

$$\begin{aligned} T^i &= \Gamma_{jk}^i dx^j \wedge dx^k = -\Gamma_{jk}^i dx^k \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i) dx^k \wedge dx^j \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

利用式 (5.4.18) 和式 (5.4.28):

$$[T_{kj}^i - (\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i)] dx^k \wedge dx^j = 0 \quad (5.4.29)$$

根据  $dx^k \wedge dx^j$  的线性无关性可知式 (5.4.26) 成立。证毕。

利用定理 5.4.4 可知如下结论成立。

**定理 5.4.4** 仿射联络  $\nabla$  是无挠的  $\Leftrightarrow \nabla$  关于自然标架场  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  的联络系数  $\Gamma_{kj}^i$  满足:

$$\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i \quad (5.4.30)$$

这说明无挠联络的联络系数关于下指标是对称的。这也是定义 5.4.3 中将无挠联络称为对称联络的原因。

### 5.4.3 列维-齐维塔联络

黎曼流形是指定了黎曼度量的流形。当流形装备了黎曼度量后, 一个自然的对应仿射联络是列维-齐维塔联络 (Levi-Civita connection)。列维-齐维塔联络以意大利数学家列维-齐维塔 (T. Levi-Civita, 1873—1941 年) 命名, 其生平和学术贡献参见附录 5.4。

**定义 5.4.5 (列维-齐维塔联络)** 设  $(M, g)$  为光滑黎曼流形, 若其上的仿射联络  $D$  满足:

$$(1) \quad D_X Y - D_Y X = [X, Y] \quad (5.4.31)$$

$$(2) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \quad (5.4.32)$$

则称  $D$  为黎曼流形  $(M, g)$  上的列维-齐维塔联络。称  $D_X Y$  为  $Y$  关于  $X$  的协变导数 (covariant derivative) 或共变导数。

对比挠率张量的定义可知, 式 (5.4.31) 说明列维-齐维塔联络  $D$  是无挠的。根据定理 5.4.4 可知, 列维-齐维塔联络的联络系数关于下指标是对称的。另外, 在自然标架场  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  下, 也

可采用如下方式直接推导: 在式 (5.4.31) 中取  $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$ , 有:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \left[ \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \quad (5.4.33)$$

而注意到

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

和

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = 0$$

所以可得式 (5.4.30)。

也称联络  $D$  满足式 (5.4.32) 为联络  $D$  保持黎曼内积, 或联络  $D$  与黎曼度量  $g$  是相容的 (compatible)。因此, 列维-齐维塔联络就是与度量  $g$  相容的、无挠的仿射联络, 也是保持黎曼内积的对称仿射联络。

下面的黎曼几何基本定理 (the fundamental theorem of Riemannian geometry) 保证了黎曼流形上列维-齐维塔联络的存在唯一性。

**定理 5.4.5 (黎曼几何基本定理)** 光滑黎曼流形  $(M, g)$  上存在唯一的列维-齐维塔联络  $D$ 。

**证明:** 该定理要求在黎曼流形上构造一个满足式 (5.4.31) 和式 (5.4.32) 的联络。对  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ , 有式 (5.4.32) 成立。轮换  $X, Y$  和  $Z$ , 有:

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle \quad (5.4.34)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle \quad (5.4.35)$$

将式 (5.4.32) 与式 (5.4.34) 相加, 再减去式 (5.4.35), 可得:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle D_Y Z - D_Z Y, X \rangle + \langle D_X Z - D_Z X, Y \rangle \\ &\quad + \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Z, D_X Y - [X, Y] \rangle \end{aligned} \quad (5.4.36)$$

整理可得

$$\begin{aligned} 2\langle D_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

由此可见,  $D_X Y$  完全由切向量场的内积和泊松括号积所决定, 可将式 (5.4.37) 作为  $D_X Y$  的定义。不难验证如此定义的  $D$  满足定义式 (5.4.31)。事实上, 交换式 (5.4.37) 中的  $X$  和  $Y$ , 可得:

$$\begin{aligned} 2\langle D_Y X, Z \rangle &= Y\langle X, Z \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Z\langle Y, X \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle \end{aligned} \quad (5.4.38)$$

将式 (5.4.37) 与式 (5.4.38) 相加可得:

$$2\langle D_X Y - D_Y X, Z \rangle = 2\langle [X, Y], Z \rangle \quad (5.4.39)$$

即如此定义的  $D$  满足式 (5.4.31)。

我们是由式 (5.4.32) 出发获得该联络的。所以, 此联络自然满足式 (5.4.32)。而根据式 (5.4.37) 可知, 该联络的定义表达式是唯一确定的, 因此唯一性自然成立。证毕。

证明中的式 (5.4.37) 也被称为科斯居尔公式 (Koszul formula)。科斯居尔 (J.-L. Koszul, 1921 年—), 法国数学家, 布尔巴基学派一员。这里采用的引入仿射联络的形式方式即来源于他在 1950 年给出的描述向量丛上联络的代数框架。科斯居尔公式指出了黎曼流形上的无挠、与度量相容的列维-齐维塔联络由该式唯一确定给出。科斯居尔公式的实质是利用黎曼度量唯一确定列维-齐维塔联络。

从上述讨论可以看出, 只要给出黎曼流形的一个黎曼度量  $g$ , 就可以唯一确定一个列维-齐维塔联络  $D$ 。列维-齐维塔联络是黎曼流形上与黎曼度量  $g$  唯一相容的典范联络 (canonical connection)。因此, 也称它为黎曼联络 (Riemannian connectin)。

下面从度量系数和联络系数的角度来考察定理 5.4.5 的结论。在自然标架场  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  下, 在科斯居尔公式 (5.4.36) 式中取  $X = \frac{\partial}{\partial x^j}, Y = \frac{\partial}{\partial x^k}, Z = \frac{\partial}{\partial x^l}$ , 注意到  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$ , 有:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{jk}^i g_{il} &= 2\Gamma_{jk}^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = 2 \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \\ &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

即有如下联络系数公式:



$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (5.4.41)$$

上述讨论说明：列维-齐维塔联络作用于向量场，它是微分流形上的一种附加结构，不是流形的微分结构所固有的。但是，只要在光滑流形上指定了黎曼度量，那么在该黎曼流形上就有唯一的列维-齐维塔联络与给定的黎曼度量相对应。所以，列维-齐维塔联络是流形自身的一种附加结构，与外围流形无关；由黎曼度量所决定，是黎曼流形的一种内蕴结构。

**【例 5.4.1】** 双曲半平面  $H^2 = \{(x^1, x^2) \in R^2 \mid x^2 > 0\}$  上的度量系数为：

$$g_{ij} = \frac{1}{(x^2)^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

求  $H^2$  的联络系数。

**解：**由  $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(x^2)^2}$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$  可得：  $g^{11} = g^{22} = (x^2)^2$ ,  $g^{12} = g^{21} = 0$ 。这样，利用式 (5.4.41) 可得：

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

同理计算可得  $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x^2}$ ,  $\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{x^2}$ , 其余联络系数皆为零。

#### 5.4.4 协变微分

在 5.4.3 节中，利用仿射联络引入了列维-齐维塔联络的概念。实际上，也可以利用其他方法引入这个概念。下面先在黎曼流形上考查光滑切向量场的分量函数在坐标变换下的规律，进而引入协变微分算子的概念。

设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^j)$  是  $m$  维黎曼流形  $(M, g)$  在  $p$  点处的两个局部坐标系，则光滑切向量场  $X$  在  $U$  和  $V$  上的限制可以表示为：  $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  和  $X|_V = \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ 。当  $U \cap V \neq \emptyset$  时，有：

$$X|_{U \cap V} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

由此可得  $X$  的分量函数的坐标变换关系式：

$$\tilde{X}^i = X^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \quad (5.4.42)$$

所以，切向量场  $X$  的分量函数  $X^i$  在局部坐标系变换下是反协变的。对式 (5.4.42) 两边外微分，有：

$$d\tilde{X}^i = dX^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} + X^j \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \quad (5.4.43)$$

由此可知， $dX^i$  不再满足反协变的坐标变换规律。

黎曼度量  $g$  在局部坐标系  $(U; x^i)$  和  $(V; y^j)$  中的度量系数分别为： $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$  和  $\tilde{g}_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ ，规定相应的克里斯托弗符号 (Christoffel symbols) 分别为：

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (5.4.44)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (5.4.45)$$

克里斯托弗符号也被简称为克氏符号，是以德国数学家、物理学家克里斯托弗（E. B. Christoffel, 1829—1900 年）的名字命名的。

当  $U \cap V \neq \emptyset$  时，有：

$$g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left( \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^p}, \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^q} \right) = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \quad (5.4.46)$$

由此可知，度量系数矩阵  $(g_{ij})_{n \times n}$  的逆矩阵元素为：

$$g^{ij} = \tilde{g}^{pq} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \quad (5.4.47)$$

由式 (5.4.46) 可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} &= \frac{\partial \tilde{g}_{pq}}{\partial x^l} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \tilde{g}_{pq} \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^l \partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \tilde{g}_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^l \partial x^j} \\ &= \frac{\partial \tilde{g}_{pq}}{\partial y^r} \frac{\partial y^r}{\partial x^l} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \tilde{g}_{pq} \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^l \partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \tilde{g}_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^l \partial x^j} \end{aligned} \quad (5.4.48)$$

轮换式 (5.4.48) 中的指标  $i, j, l$ ，可得：

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{g}_{rp}}{\partial x^l} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} + \tilde{g}_{rp} \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} + \tilde{g}_{rp} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^l \partial x^i} \quad (5.4.49)$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{g}_{qr}}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial y^r}{\partial x^l} + \tilde{g}_{qr} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial y^r}{\partial x^l} + \tilde{g}_{qr} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^l} \quad (5.4.50)$$

因为  $\tilde{g}_{pq} = \tilde{g}_{qp}$ ， $\frac{\partial^2 y^q}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^i \partial x^j}$ ，并且注意到  $p, q, r$  是求和指标，所以由式 (5.4.48)、式 (5.4.49)

和式 (5.4.50) 可得：

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \left( \frac{\partial \tilde{g}_{rp}}{\partial y^q} + \frac{\partial \tilde{g}_{qr}}{\partial y^p} - \frac{\partial \tilde{g}_{pq}}{\partial y^r} \right) \frac{\partial y^r}{\partial x^l} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + 2 \tilde{g}_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^l} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^i \partial x^j} \quad (5.4.51)$$

将式 (5.4.51) 代入克里斯托弗符号的表达式 (5.4.44) 中，并利用式 (5.4.47)，有：

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{rs} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{rp}}{\partial y^q} + \frac{\partial \tilde{g}_{qr}}{\partial y^p} - \frac{\partial \tilde{g}_{pq}}{\partial y^r} \right) \frac{\partial y^r}{\partial x^l} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \\ &\quad + \tilde{g}_{pq} \tilde{g}^{rs} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial x^l} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= \tilde{\Gamma}_{pq}^s \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \frac{\partial y^r}{\partial x^l} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \tilde{g}_{pq} \tilde{g}^{rs} \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial^2 y^q}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial y^s} \frac{\partial y^p}{\partial x^l} \\ &= \tilde{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial y^r} \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned} \quad (5.4.52)$$

由此可得：

$$\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^r}{\partial x^k} - \tilde{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} \quad (5.4.53)$$

将式 (5.4.53) 代入式 (5.4.43)，有：

$$d\tilde{X}^i + \tilde{X}^p \tilde{\Gamma}_{pq}^i dy^q = (dX^j + X^l \Gamma_{lk}^j dx^k) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \quad (5.4.54)$$

上述推导获得的式 (5.4.54) 说明：在局部坐标变换下，一次外微分式  $dX^j + X^l \Gamma_{lk}^j dx^k$  满足反协变的变换规律。我们据此引入协变微分的定义。

**定义 5.4.6 (协变微分算子)** 设  $M$  为  $m$  维黎曼流形， $(U; x^i)$  是流形  $M$  在  $p$  点附近的局部坐标系。对  $\forall X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in X(M)$ ，令  $DX^i = dX^i + X^l \Gamma_{lk}^i dx^k$ ，则  $DX = DX^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  是  $M$  上的光滑切向量场，称其为切向量场  $X$  的协变微分 (covariant derivative)，称  $D$  为协变微分算子。对  $\forall Y \in X(M)$ ，令：

$$D_Y X = (DX)(Y) \quad (5.4.55)$$

称  $D_Y X$  为切向量场  $X$  关于切向量场  $Y$  的协变导数。

不难发现定义 5.4.5 中的列维-齐维塔联络和定义 5.4.6 中的协变微分算子是同一个概念。事实上，可以在定义 5.4.6 的基础上推导协变微分的性质，与列维-齐维塔联络的定义和性质加以比较。对  $\forall X, Y \in X(M)$ ，在局部坐标系  $(U; x^i)$  下，有：

$$\begin{aligned} D_Y X &= (DX)(Y) = \left( DX^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) Y = (dX^i + X^l \Gamma_{lk}^i dx^k) \frac{\partial}{\partial x^i} (Y) \\ &= \left[ dX^i(Y) + X^l \Gamma_{lk}^i dx^k \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (Y(X^i) + X^l Y^k \Gamma_{lk}^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (5.4.56)$$

由此可知， $D_Y X$  是光滑切向量场。同时，由式 (5.4.56) 可得：

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{lk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.4.57)$$

事实上，也可以利用式 (5.4.57) 来定义列维-齐维塔联络。

在定义 5.4.6 的前提下，可以验证协变微分算子具有如下性质。

**定理 5.4.6** 设  $M$  为  $n$  维黎曼流形， $D$  为其上的协变微分算子，则对  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$ ， $f \in C^\infty(M)$ ，有：

- (1)  $D_X(Y + \lambda Z) = D_X Y + \lambda D_X Z$ ；
- (2)  $D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y$ ；
- (3)  $D_{X+\lambda Y} Z = D_X Z + \lambda D_Y Z$ ；
- (4)  $D_{fX} Y = fD_X Y$ ；
- (5)  $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ 。

对比前后两种定义方式可知，式 (5.4.44) 中的克里斯托弗符号与式 (5.4.41) 中的联络系数是一个概念。(1) 和 (2) 合成即为式 (5.4.1)，(3) 和 (4) 的合成即为式 (5.4.2)，(5)

即式 (5.4.31)，而式 (5.4.41) 对应列维-齐维塔联络定义的式 (5.4.32)。因此不难理解定义 5.4.5 和定义 5.4.6 在定义方式上的差别。

## 附录 5.4 列维-齐维塔生平及学术贡献

图利奥·列维-齐维塔 (Tullio Levi-Civita, 1873—1941 年) (图 5.4.1)，意大利数学家，是 20 世纪主要数学家之一。他最著名的工作是绝对微分 (absolute differential calculus，即张量分析) 及其在相对论理论中的应用，他在天体力学、微分方程和流体力学等其他领域也做出了重要贡献。



图 5.4.1 列维-齐维塔

列维-齐维塔 1873 年 3 月 29 日生于意大利帕多瓦，1941 年 12 月 29 日卒于罗马。1890—1894 年，他在帕多瓦大学学习，并在毕业后留校任教。1918 年，他受聘任罗马大学教授。1938 年，因其是犹太人，列维-齐维塔被意大利法西斯政权所撤职。

列维-齐维塔的老师里奇-库尔巴斯托罗 (Gregorio Ricci Curbastro, 1853—1925 年) 在前人开创的微分不变量研究基础上，在 1887—1896 年发展了张量分析方法，创建了绝对微分学理论。后来，里奇创立了一个研究小组，列维-齐维塔是该小组的成员。1900 年，列维-齐维塔和他的老师里奇在《数学年鉴》(Mathematische Annalen) 上发表了《绝对微分法及其应用》(Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications) 一文，该文成为张量分析的经典著作。这篇文章利用张量分析给出

了欧氏空间和黎曼流形的几何性质和物理规律的表示。它还指出了如何把某些偏微分方程及物理规律表示成张量的形式，以便使它们与坐标系的选取无关。张量分析主要研究共变 (协变) 关系，即在坐标系变换下保持不变的关系。而这种关系在相对论中具有重要意义。根据相对论理论，观测者的坐标系可能各不相同，但客观的物理规律对每一观测者都成立。因此，这一特征使得绝对微分学 (张量分析) 成为爱因斯坦发展广义相对论理论的关键数学工具。这篇文章也成为爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955 年) 掌握张量分析的主要源泉。1916 年，爱因斯坦发表了《广义相对论的基础》(Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie) 一文，成功地运用这一理论表述他的广义相对论。“张量分析”这一名称也是爱因斯坦首先开始使用的。爱因斯坦的工作使张量分析和黎曼几何获得了世人的注意，使它们的应用价值得以展现，从而促进了它们的发展。

列维-齐维塔发现了爱因斯坦使用张量分析解释相对论过程中出现的一些疏漏和错误。在 1915—1917 年间，列维-齐维塔一直与爱因斯坦保持通信，他们共同探讨列维-齐维塔关于静态引力场的系列论文。最终，他们在许多问题上都达成了一致的看法。在一封谈论列维-齐维塔新工作的信中，爱因斯坦写到：“我尊重你的计算方法的优雅性。不像我们要费力地徒步而行，骑着这样数学之马来通过这些领域必定是令人高兴的 (I admire the elegance of your method of computation; it must be nice to ride through these fields upon the horse of true mathematics while the like of us have to make our way laboriously on foot)。”

1917 年,列维-齐维塔发表了论文《关于黎曼几何学中的平行性概念》(*Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*)。在论文中,他引入了向量的平行位移(parallel displacement)的概念,阐明了黎曼流形上平行向量的涵义。这篇论文恢复了当时主要作为分析理论研究的黎曼几何学的几何学面目,直观地揭示了黎曼流形所具有的几何意义。

解析动力系统是列维-齐维塔研究的另一个主题。他的许多文章都是研究三体问题的。该问题是天体力学中的基本力学模型,是指三个质量、初始位置和初始速度都是任意的可视为质点的天体,在相互之间万有引力的作用下的运动规律问题。1933 年,列维-齐维塔对量子力学中的狄拉克方程(Dirac equation)也做出了贡献。他在流体力学和微分方程组方面也发表了一些重要文章。

1922 年,皇家学会将西尔维斯特奖章授予列维-齐维塔。该奖章每三年颁奖一次,每次授予一位杰出数学家,其他获奖人包括:1901 年的法国数学家庞加莱(J. H. Poincaré, 1854—1912 年)、1916 年的法国数学家达布(J. G. Darboux, 1842—1917 年)、1934 年的英国数学家罗素(B. A. W. Russell, 1872—1970 年)、1940 年的哈代(G. H. Hardy, 1877—1947 年)。1930 年,列维-齐维塔当选为皇家学会会士。同时,他也是伦敦数学会、爱丁堡皇家学会、爱丁堡数学会会员。他一生发表的论著近 200 篇。他所著的《经典力学和相对论力学问题》(*Questioni di meccanica classicae relativistica*, 1924 年)、《绝对微分学讲义》(*Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, 1925 年)、《理论力学讲义》(*Lezioni di meccanica razionale*, 1926—1927 年)都是公认的经典著作。

1936 年,列维-齐维塔接受爱因斯坦的邀请,到美国普林斯顿访问一年。之后,他回到了意大利。此时,二战的阴云已经在欧洲密布。意大利法西斯制定的 1938 年种族法律剥夺了他的教授职位和所有科学学会的会员资格。他被隔绝于他所热爱的科学世界之外。1941 年,他在罗马的寓所去世。

当被问及最喜爱意大利的什么时,爱因斯坦回答:“意大利面和列维-齐维塔。”

## 5.5 黎曼曲率和结构方程

曲率、平行移动和列维-齐维塔联络是黎曼几何的三个重要工具,被称为是黎曼几何的三角洲。从 5.4 节的讨论来看,联络的概念较为抽象。但它却可以用来引入平行移动、曲率等反映流形几何特性的概念。本节将在联络的基础上讨论平行移动、测地线、曲率和黎曼流形的结构方程。

### 5.5.1 平行移动和测地线

列维-齐维塔在黎曼流形上引入了平行移动(parallel transport)的概念,而外尔则将该概念做了推广和澄清。

**定义 5.5.1 (平行切向量场)** 设  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  是仿射联络空间  $(M, \nabla)$  中的一条光滑曲线,  $Y(t)$  是沿着曲线  $\gamma$  定义的向量场。而  $\gamma'(t)$  也是沿曲线  $\gamma$  定义的一个向量场。可以把切向量场  $Y(t)$  和  $\gamma'(t)$  延拓成流形  $M$  上的向量场,即存在  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in X(M)$ , 使得:  $\gamma'(t) = \tilde{X}|_{\gamma(t)}$ ,  $Y(t) = \tilde{Y}|_{\gamma(t)}$ 。令  $\nabla_{\gamma'} Y = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_{\gamma}$ , 若  $\nabla_{\gamma'} Y = 0$ , 则称切向量场  $Y$  沿曲线  $\gamma$  是平行的(parallel)。特别地,若  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ , 则称曲线  $\gamma$  是流形  $M$  上的一条测地线(geodesic)。

在仿射联络空间上, 可将沿着其上一条光滑曲线分布的平行切向量看成是由一点处切向量平行移动获得的。

**定理 5.5.1** 设  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  是  $m$  维仿射联络空间  $(M, \nabla)$  中的光滑曲线,  $Y(t)$  是沿着曲线  $\gamma$  定义的向量场。  $Y$  沿曲线  $\gamma$  是平行的当且仅当:

$$\frac{dY^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i Y^k \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.5.1)$$

**证明:** 在局部坐标系  $(U; x^i)$  下有:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\gamma'} Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{dY^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \frac{dY^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \nabla_{\frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{dY^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( \frac{dY^i}{dt} + Y^k \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

即式 (5.5.1) 成立。证毕。

注意到曲线  $\gamma$  的切向量场:

$$\gamma'(t) = \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.5.2)$$

利用定理 5.5.1 和测地线的定义可得如下推论。

**推论 5.5.1** 设  $\gamma: (a, b) \rightarrow M$  是仿射联络空间  $(M, \nabla)$  中的一条光滑曲线。曲线  $\gamma$  是测地线当且仅当:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.5.3)$$

## 5.5.2 仿射联络的曲率张量和曲率形式

**定义 5.5.2 (仿射联络的曲率张量)** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间,  $\forall X, Y, Z \in X(M)$ , 令:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (5.5.4)$$

称映射  $R: X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$  为仿射联络  $\nabla$  的曲率张量 (curvature tensor)。令

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (5.5.5)$$

称映射  $R(X, Y): X(M) \rightarrow X(M)$  为仿射联络空间  $(M, \nabla)$  关于光滑切向量场  $X, Y$  的曲率算子 (curvature operator)。

不难发现:  $R(X, Y) \in \text{End}(X(M))$ , 其中  $\text{End}(X(M))$  为  $X(M)$  上所有同构构成的空间。所以,

$$R: X(M) \times X(M) \rightarrow \text{End}(X(M))$$

曲率张量  $R$  关于每个变量都是  $C^\infty(M)$  线性的, 即对  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 有:

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z \quad (5.5.6)$$

事实上, 根据协变微分的性质, 有:

$$\begin{aligned}
R(X, fY)Z &= D_X D_{fY} Z - D_{fY} D_X Z - D_{[X, fY]} Z \\
&= D_X (fD_Y Z) - fD_Y D_X Z - D_{X(f)Y + f[X, Y]} Z \\
&= X(f)D_Y Z + fD_X D_Y Z - fD_Y D_X Z - fD_{[X, Y]} Z - X(f)D_Y Z \\
&= fR(X, Y)Z
\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

其余类似可证。

利用定义 5.5.2 证明曲率张量具有如下性质：对  $\forall X, X_1, X_2, Y, Z, Z_1, Z_2 \in X(M)$ ， $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ ，有：

$$(1) \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \tag{5.5.8}$$

$$(2) \quad R(f_1 X_1 + f_2 X_2, Y)Z = f_1 R(X_1, Y)Z + f_2 R(X_2, Y)Z \tag{5.5.9}$$

$$(3) \quad R(X, Y)(f_1 Z_1 + f_2 Z_2) = f_1 R(X, Y)Z_1 + f_2 R(X, Y)Z_2 \tag{5.5.10}$$

综上所述，张量  $R: X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$  是三重  $C^\infty(M)$  线性的。

下面在自然标架场  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  下讨论。设  $(U; x^i)$  是流形  $M$  在  $p$  点附近的局部坐标系，则令切

向量场  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$  在自然标架下的表示为：

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R_{kij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{5.5.11}$$

在式 (5.5.11) 两边作用于  $dx^m$ ，有：

$$R_{kij}^m = dx^m \left( R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \tag{5.5.12}$$

这样，获得了曲率张量在局部坐标系下的分量表示：

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = dx^l \left( R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{5.5.13}$$

根据曲率张量的定义，计算可得：

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &= D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left( \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
&= \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s \frac{\partial}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma_{ik}^{ls} \Gamma_{jl}^{sl} \frac{\partial}{\partial x^s} \\
&= \left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{si}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l \right) \frac{\partial}{\partial x^l}
\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

在式 (5.5.14) 两边作用于  $dx^m$ ，有：

$$R_{kij}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{si}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^l \tag{5.5.15}$$

由此可知，曲率张量被联络系数所完全确定。

**定义 5.5.3 (仿射联络的曲率形式)** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间, 因为  $R(X, Y)e_i \in X(M)$ , 所以  $R(X, Y)e_i$  可由局部标架场  $\{e_i\}$  线性表出:

$$R(X, Y)e_i = \Omega_j^i(X, Y)e_j \quad (5.5.16)$$

其中  $\Omega_j^i: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  是 2 次形式, 称其为  $\nabla$  的曲率形式 (curvature form)。

因为  $\Omega_j^i$  为 2 次形式, 所以可由 2 次形式的基底  $\{\omega^j \wedge \omega^k\}$  表出, 即:

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \quad (5.5.17)$$

式中,  $R_{jkl}^i$  为曲率张量  $R$  的分量。利用外积运算的反交换性可证:

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \quad (5.5.18)$$

**定理 5.5.2** 设  $(M, \nabla)$  为仿射联络空间,  $\Omega_j^i$  为曲率形式, 有:

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \quad (5.5.19)$$

**证明:**  $\forall X \in X(M)_i$ , 注意到  $X = X^i e_i = \omega^i(X)e_i$ ,  $\nabla_X e_i = \omega_i^k(X)e_k$ , 利用式 (5.5.4), 有:

$$\begin{aligned} R(X, Y)e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i \\ &= \nabla_X (\omega_i^k(Y)e_k) - \nabla_Y (\omega_i^k(X)e_k) - \omega_i^k([X, Y])e_k \\ &= X(\omega_i^k(Y))e_k + \omega_i^k(Y)\nabla_X e_k - Y(\omega_i^k(X))e_k \\ &\quad - \omega_i^k(X)\nabla_Y e_k - \omega_i^k([X, Y])e_k \\ &= d\omega_j^i(X, Y)e_j + \omega_i^k(Y)\nabla_X e_k - \omega_i^k(X)\nabla_Y e_k \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

同时, 有:

$$\begin{aligned} \omega_i^k(Y)\nabla_X e_k - \omega_i^k(X)\nabla_Y e_k &= \omega_i^k(Y)\omega_k^j(X)e_j - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y)e_j \\ &= \omega_k^j \wedge \omega_i^k(X, Y)e_j \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

将式 (5.5.21) 代入式 (5.5.20), 有:

$$R(X, Y)e_i = d\omega_j^i(X, Y)e_j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k(X, Y)e_j \quad (5.5.22)$$

利用式 (5.5.16) 和式 (5.5.22), 并根据  $X$  和  $Y$  的任意性可得式 (5.5.19)。证毕。

称式 (5.4.22) 和式 (5.5.19) 为仿射联络空间  $(M, \nabla)$  的嘉当结构方程 (Cartan's structure equations)。它们用活动标架刻画了仿射联络空间的挠率形式和曲率形式。

### 5.5.3 黎曼曲率张量、截曲率和常曲率空间

**定义 5.5.4 (黎曼曲率张量)** 设  $(M, g)$  为黎曼流形,  $\forall X, Y, Z, W \in X(M)$ , 令:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(Z, W)Y, X \rangle \quad (5.5.23)$$

称四重线性函数  $R: X(M) \times X(M) \times X(M) \times X(M) \rightarrow R$  为黎曼流形  $(M, g)$  的黎曼曲率张量 (Riemannian curvature tensor), 或称为黎曼-克里斯托弗张量 (Riemann-Christoffel tensor)。

下面讨论黎曼曲率张量的分量。设  $\{e_i\}$  为局部标架场, 利用式 (5.5.16) 和式 (5.5.17) 可得:



$$\begin{aligned}
R(e_k, e_l)e_j &= \mathcal{L}_j^i(e_k, e_l)e_i = \frac{1}{2}R_{jst}^i \omega^s \wedge \omega^t(e_k, e_l)e_i \\
&= \frac{1}{2}R_{jst}^i [\omega^s(e_k)\omega^t(e_l) - \omega^s(e_l)\omega^t(e_k)]e_i \\
&= \frac{1}{2}(R_{jkl}^i - R_{jlk}^i)e_i = R_{jkl}^i e_i
\end{aligned} \tag{5.5.24}$$

所以, 有:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= R(e_i, e_j, e_k, e_l) = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle \\
&= \langle R_{jkl}^i e_h, e_i \rangle = R_{jkl}^h g_{hi}
\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

在自然标架场  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  下,  $R$  有如下分量表示:

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \tag{5.5.26}$$

式中,  $R_{ijkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$ 。利用式 (5.5.15), 可得:

$$R_{klij} = g_{hl} \left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{si}^h - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^h \right)$$

将指标重写有:

$$R_{ijkl} = g_{hj} \left( \frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^s \Gamma_{sk}^h - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sl}^h \right) \tag{5.5.27}$$

进一步推导可得:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^j} \right) \\
&\quad + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{jl}^h g_{sh} - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{il}^s g_{sh}
\end{aligned} \tag{5.5.28}$$

验证可知, 曲率张量  $R$  的分量具有如下性质。

(1) 反对称性:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \tag{5.5.29}$$

(2) 对称性:

$$R_{ijkl} = R_{klij} \tag{5.5.30}$$

(3) 第一比安基恒等式 (the first Bianchi identity):

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \tag{5.5.31}$$

另外, 还有关于黎曼曲率张量协变导数的第二比安基恒等式成立。它们是以意大利数学家比安基 (L. Bianchi, 1856—1928 年) 的名字命名的。虽然比安基恒等式被如此命名, 但却是由比安基的同事、张量分析的创始人里奇-库尔巴斯托罗 (G. Ricci-Curbastro, 1853—1925 年) 在 1880 年左右实现发现的, 但这个发现被他和别人所遗忘。直到比安基在 1902 年将它们重新发现。比安基恒等式在之后的广义相对论中发挥了重要作用, 因为它们理解爱因斯坦场方程 (Einstein field equation) 的基本工具。

对  $\forall p \in M$ , 设  $X_p$  和  $Y_p$  为  $T_p M$  中的两个线性无关的切向量, 可以证明:

$$\frac{R(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2}$$

仅与  $X_p$  和  $Y_p$  所生成  $T_p M$  的二维截面  $\pi[X_p, Y_p]$  有关, 而与  $X_p$  和  $Y_p$  在  $\pi[X_p, Y_p]$  中的选取无关。据此引入黎曼流形的截曲率 (sectional curvature)。

**定义 5.5.5 (截曲率)** 设  $(M, g)$  为黎曼流形, 对  $\forall p \in M$ , 设  $X_p$  和  $Y_p$  为  $T_p M$  中的两个线性无关的切向量, 称:

$$K(X_p, Y_p) = \frac{R(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2} \quad (5.5.32)$$

为黎曼流形  $(M, g)$  在点  $p$  处沿二维截面  $\pi[X_p, Y_p]$  的截面曲率, 简称截曲率。

对二维黎曼流形  $M$  而言,  $M$  的截曲率就是其高斯曲率。因此, 截曲率是高斯曲率在高维黎曼流形上的推广。

**定义 5.5.6 (迷向流形、常曲率黎曼流形和空间形式)** 若黎曼流形  $M$  的截曲率  $K$  在点  $p$  处是常数, 即与点  $p$  处的二维截面  $\pi[X_p, Y_p]$  的选取无关, 则称黎曼流形  $M$  在点  $p$  处是迷向的 (isotropy), 点  $p$  称为黎曼流形  $M$  的迷向点。若黎曼流形  $M$  的所有点都是迷向点, 则称  $M$  为迷向流形 (isotropic manifold)。若黎曼流形  $M$  的截曲率为常数, 即与点  $p$  和二维截面  $\pi[X_p, Y_p]$  的选取都无关, 则称  $M$  为常曲率黎曼流形 (Riemannian manifold with constant curvature)。完备连通的常曲率黎曼流形称为空间形式 (space form)。将截曲率为零的、正的和负的空间形式分别称为抛物的 (parabolic)、椭圆的 (elliptic) 和双曲的 (hyperbolic) 空间形式。

根据德国数学家基灵 (W. K. J. Killing, 1847—1923 年) 和德国几何学家霍普夫 (H. Hopf, 1894—1971 年) 在 1891 年和 1926 年以及其他数学家的结果, 具有相同常截曲率  $c$  的单连通空间形式是彼此等距的, 空间形式等距于欧氏空间  $R^n$  (当  $c = 0$  时)、球面  $S^n \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$  (当  $c > 0$  时) 和双曲空间  $H^n$  (当  $c < 0$  时), 其中  $S^n \left( \frac{1}{\sqrt{c}} \right)$  为  $R^{n+1}$  中的半径为  $\frac{1}{\sqrt{c}}$  的  $n$  维球面, 双曲空间  $H^n$  为:

$$H^n = \left\{ x = (x^1, \dots, x^n) \in R^n \mid \sum (x^i)^2 < -\frac{4}{c} \right\} \quad (5.5.33)$$

并且具有度量:

$$g = \frac{1}{\left[ 1 + c/4 \sum_i (x^i)^2 \right]} \sum_i (dx^i)^2$$

常曲率曲面与曲面的几何分类 (geometric classification of surfaces) 和单值化定理 (uniformization theorem) 猜想的研究紧密相关。德国数学家克莱因 (C. F. Klein, 1849—1925 年) 和法国数学家庞加莱 (H. Poincaré, 1854—1912 年) 提出了著名的单值化定理猜想: 每个单连通的黎曼面都共形等价于开单位圆盘 (open unit disk)、复平面 (complex plane) 和黎曼球面 (Riemann sphere) 三者之一。1907 年, 庞加莱和德国数学家克贝 (P. Koebe, 1882—1945 年)

给出了该猜想的严格证明。类似于二维曲面的单值化定理，三维流形存在著名的瑟斯顿几何化猜想（Thurston's geometrization conjecture）：三维闭流形具有 8 种标准的几何结构。该猜想由美国数学家瑟斯顿（W. Thurston, 1946—2012 年）在 1982 年提出（W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, American Mathematical Society Bulletin, New Series 6 (3): 357-381）。瑟斯顿几何化猜想包含了庞加莱在 1904 年提出的庞加莱猜想（Poincaré conjecture）：任一单连通的三维闭流形都与三维球面同胚。2000 年，庞加莱猜想被美国克雷数学研究所（Clay Mathematics Institute）列为 7 个千禧年百万美金大奖难题之一。2003 年，俄罗斯数学家佩雷尔曼（G. Y. Perelman, 1966 年—）利用美国数学家哈密顿（R. Hamilton, 1943 年—）在 20 世纪 80 年代发明的几何分析工具——里奇流（Ricci flow）给出了瑟斯顿几何化猜想和庞加莱猜想的证明。在此过程中，许多杰出的华人数学家也做出了自己的贡献。

### 5.5.4 黎曼流形的结构方程

在局部标架场  $\{e_i\}$  下，在式(5.4.32)中取  $X = e_k$ ,  $Y = e_i$ ,  $Z = e_j$ ，并注意到  $e_k g_{ij} = (dg_{ij})(e_k)$ ,  $D_{e_k}(e_j) = \omega_j^i(e_k)e_i$ ，可得：

$$\begin{aligned} (dg_{ij})(e_k) &= e_k \langle e_i, e_j \rangle = \langle D_{e_k} e_i, e_j \rangle + \langle e_i, D_{e_k} e_j \rangle \\ &= g_{ij} \omega_i^l(e_k) + g_{il} \omega_j^l(e_k) \end{aligned} \quad (5.5.34)$$

因此，有：

$$dg_{ij} = g_{il} \omega_j^l + g_{ij} \omega_i^l \quad (5.5.35)$$

从而，对黎曼流形而言，利用定理 5.4.2、定理 5.5.2 和式 (5.5.35) 可得如下定理。

**定理 5.5.3（黎曼流形的结构方程）** 设  $D$  是黎曼流形  $(M, g)$  的黎曼联络，有如下结构方程成立：

$$\begin{cases} d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k = 0 \\ g_{ik} \omega_j^k + g_{kj} \omega_i^k = dg_{ij} \\ d\omega_j^i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \Omega_j^i \\ \Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jk}^i \omega^k \wedge \omega^l \end{cases} \quad (5.5.36)$$

特别地，取  $\{e_i\}$  为局部单位正交标架场，即  $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ 。令  $\omega_i = \delta_{ij} \omega^j = \omega^i$ ,  $\omega_{ij} = \delta_{ik} \omega_j^k = \omega_j^i$ ,  $\Omega_{ij} = \delta_{ik} \Omega_j^k = \Omega_j^i$ ，则结构方程式 (5.5.36) 变为：

$$\begin{cases} d\omega_i + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k = 0 \\ \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \\ d\omega_{ij} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l \end{cases} \quad (5.5.37)$$

**【例 5.5.1】** 证明：欧氏空间  $R^{m+1}$  有如下结构方程：

$$\begin{cases} d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B = 0 \\ d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C = 0 \end{cases} \quad (5.5.38)$$

**证明:** 对  $\forall x \in R^{m+1}$ , 取  $x$  点的局部标架场  $\{e_i\}_{i=1}^{m+1}$ 。对标架  $(x; e_1, \dots, e_{m+1})$  做一个微小的扰动可得  $(x + dx; e_1 + de_1, \dots, e_{m+1} + de_{m+1})$ 。向量  $dx, de_A (A=1, \dots, m+1)$  可用原来的标架加以表示, 即有:

$$dx = \omega^A e_A \quad (5.5.39)$$

$$de_A = \omega_A^B e_B, \quad (A, B=1, \dots, m+1) \quad (5.5.40)$$

对式 (5.5.39) 的两边进行外微分, 有:

$$\begin{aligned} 0 &= d^2 x = (d\omega^A) e_A - \omega^A \wedge de_A = (d\omega^A) e_A - \omega^A \wedge \omega_A^B e_B \\ &= (d\omega^A - \omega^B \wedge \omega_B^A) e_A \end{aligned} \quad (5.5.41)$$

从而, 有:

$$d\omega^A + \omega_B^A \wedge \omega^B = 0 \quad (5.5.42)$$

类似地, 对式 (5.5.40) 的两边进行外微分, 有:

$$\begin{aligned} 0 &= d^2 e_A = (d\omega_A^B) e_B - \omega_A^B \wedge de_B \\ &= (d\omega_A^B) e_B - \omega_A^B \wedge \omega_B^C e_C \\ &= (d\omega_A^B - \omega_A^C \wedge \omega_C^B) e_B \end{aligned}$$

即

$$d\omega_A^B + \omega_C^B \wedge \omega_A^C = 0 \quad (5.5.43)$$

证毕。

特别地, 取  $e_1, \dots, e_{m+1}$  为局部单位正交标架场, 即:

$$\langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB} \quad (5.5.44)$$

对式 (5.5.43) 两边外微分, 有:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle de_A, e_B \rangle + \langle e_A, de_B \rangle = \langle \omega_A^C e_C, e_B \rangle + \langle e_A, \omega_B^C e_C \rangle \\ &= \omega_A^C \delta_{CB} + \omega_B^C \delta_{AC} = \omega_A^B + \omega_B^A \end{aligned} \quad (5.5.45)$$

**【例 5.5.2】** 证明:  $m$  维球面  $S^m \left( \frac{1}{c} \right) = \{x \in R^{m+1} \mid \|x\| = \frac{1}{c}, c \text{ 为正的常数} \}$  的结构方程为:

$$\begin{cases} d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \Omega_j^i \end{cases} \quad (5.5.46)$$

式中,  $\Omega_j^i = c^2 \omega^i \wedge \omega^j$ 。

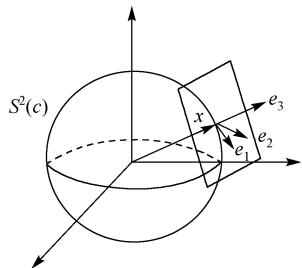


图 5.5.1 球面上的局部单位正交标架

**证明:** 对  $\forall x \in S^m(c)$ , 取局部单位正交标架  $e_1, \dots, e_{m+1}$ , 使得:

$$e_{m+1} = cx \quad (5.5.47)$$

那么,  $e_{m+1}$  是  $S^m(c)$  在  $x$  点的单位外法向量 (如图 5.5.1 所示)。

所以, 有:

$$de_{m+1} = c dx \quad (5.5.48)$$

因为  $\langle x, x \rangle = \frac{1}{c^2}$ , 所以  $\langle x, dx \rangle = 0$ 。故  $dx$  为  $S^m(c)$  的切向量, 即  $dx = \omega^i e_i$ 。代入式 (5.5.48), 有:

$$de_{m+1} = c\omega^i e_i \quad (5.5.49)$$

另一方面,  $de_{m+1} \in R^{m+1}$ , 故  $de_{m+1}$  可由  $\{e_A\}_{A=1}^{m+1}$  表示, 即:

$$de_{m+1} = \omega_{m+1}^A e_A = \omega_{m+1}^i e_i + \omega_{m+1}^{m+1} e_{m+1} = \omega_{m+1}^i e_i \quad (5.5.50)$$

将式 (5.5.49) 和式 (5.5.50) 联立, 有:

$$\omega^i = \frac{1}{c} \omega_{m+1}^i \quad (5.5.51)$$

对式 (5.5.51) 两边外微分, 利用式 (5.5.51), 有:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \frac{1}{c} d\omega_{m+1}^i = \frac{1}{c} (-\omega_A^i \wedge \omega_{m+1}^A) \\ &= -\frac{1}{c} (\omega_j^i \wedge \omega_{m+1}^j + \omega_{m+1}^i \wedge \omega_{m+1}^{m+1}) \\ &= -\frac{1}{c} \omega_j^i \wedge \omega_{m+1}^j = -\omega_j^i \wedge \omega^j \end{aligned} \quad (5.5.52)$$

再利用式 (5.5.51), 有:

$$\begin{aligned} d\omega_j^i &= -\omega_A^i \wedge \omega_j^A = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_{m+1}^i \wedge \omega_j^{m+1} \\ &= -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_{m+1}^i \wedge \omega_{m+1}^j = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + c^2 \omega^i \wedge \omega^j \end{aligned} \quad (5.5.53)$$

证毕。

### 5.5.5 里奇曲率和数量曲率

利用曲率张量, 可以引入里奇曲率张量 (Ricci curvature tensor)。

**定义 5.5.7 (里奇曲率张量)** 设  $M$  为黎曼流形,  $\{e_i\}$  和  $\{\omega^i\}$  分别为流形在点  $p$  处的局部标架场和对偶标架场, 对  $u, v \in T_p M$ , 令:

$$\text{Ric}(u, v) = \omega^i (R(e_i, u)v) \quad (5.5.54)$$

由此可得流形  $M$  上的一个二阶协变张量场  $\text{Ric}: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  为: 对  $\forall X, Y \in X(M)$ , 有:

$$(\text{Ric}(X, Y))(p) = \text{Ric}(X_p, Y_p) \quad (5.5.55)$$

称二阶协变张量场  $\text{Ric}: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M)$  为黎曼流形  $M$  上的里奇曲率张量。

利用曲率张量  $R$  可定义流形  $M$  在点  $p \in M$  处的一个线性变换:  $A_{u,v}: T_p M \rightarrow T_p M$ , 其定义为: 对  $\forall w \in T_p M$ , 有:

$$A_{u,v}(w) = R(w, u)v \quad (5.5.56)$$

这是一个 (1,1) 型张量。因为对  $w \in T_p M$ , 有:

$$R(w, u)v = \omega^i (R(w, u)v) e_i \quad (5.5.57)$$

所以

$$\text{trace}\{A_{u,v}\} = \omega^i (R(e_i, u)v) = \text{Ric}(u, v) \quad (5.5.58)$$

因此,  $\text{Ric}(u, v)$  等于线性变换  $A_{u,v}: T_p M \rightarrow T_p M$  的迹。

注意到

$$\omega^i(\cdot) = g^{ij} \langle e_j, \cdot \rangle \quad (5.5.59)$$

故有

$$\begin{aligned} \text{Ric}(u, v) &= \omega^i(R(e_i, u)v) = g^{ij} \langle e_j, R(e_i, u)v \rangle \\ &= g^{ij} R(e_j, v, e_i, u) = g^{ij} R(e_j, u, e_i, v) \\ &= \text{Ric}(v, u) \end{aligned} \quad (5.5.60)$$

所以, 里奇曲率张量  $\text{Ric}$  是黎曼流形  $M$  上的一个  $(0,2)$  型对称张量场。

里奇曲率张量  $\text{Ric}$  可用分量表示为:

$$\text{Ric} = R_{ij} \omega^i \otimes \omega^j \quad (5.5.61)$$

式中,  $R_{ij} = R_{st} \omega^s \otimes \omega^t(e_i, e_j) = \text{Ric}(e_i, e_j)$ 。进一步, 有:

$$R_{ij} = \text{Ric}(e_i, e_j) = g^{kl} R(e_k, e_i, e_l, e_j) = g^{kl} R_{klij} \quad (5.5.62)$$

特别地, 在单位正交标架场  $\{e_i\}$  下, 有:

$$\text{Ric}(u, v) = g^{ij} R(e_j, v, e_i, u) = \sum_i R(e_i, u, e_i, u) \quad (5.5.63)$$

$$R_{ij} = \sum_k R_{kikj} \quad (5.5.64)$$

**定义 5.5.8 (里奇曲率)** 设  $(M, g)$  为黎曼流形,  $\forall p \in M$ , 对  $\forall u \in T_p M$ , 称:

$$\text{Ric}(u) = \frac{\text{Ric}(u, u)}{g(u, u)} \quad (5.5.65)$$

为黎曼流形  $(M, g)$  在点  $p$  处沿切方向  $u$  的里奇曲率 (Ricci curvature)。

根据里奇曲率的定义可得:

$$\text{Ric}(u) = \text{Ric} \left( \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right) \quad (5.5.66)$$

因此, 共线的切向量具有相同的里奇曲率。可以证明  $\sum_i \text{Ric}(e_i)$  与切空间  $T_p M$  的单位正交基底  $\{e_i\}$  的选取无关, 据此引入数量曲率的定义。

**定义 5.5.9 (数量曲率)** 设  $M$  为黎曼流形,  $\forall p \in M$ ,  $\{e_i\}$  为流形  $M$  在点  $p$  处的单位正交标架场, 称  $S = \sum_i \text{Ric}(e_i)$  为流形  $M$  在点  $p$  处的数量曲率 (scalar curvature)。

易知: 在单位正交标架场  $\{e_i\}$  下, 有:

$$S = \sum_{k,i} R_{kiki} \quad (5.5.67)$$

## 5.5.6 爱因斯坦流形和卡拉比-丘流形

根据爱因斯坦的广义相对论, 引力场是弯曲时空的表现, 宇宙中一切物质的运动都可以用曲率来表示。1916 年, 爱因斯坦获得了如下爱因斯坦场方程 (Einstein field equation):

$$R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (5.5.68)$$

式中,  $G$  为万有引力常数 (gravitational constant),  $c$  为真空中的光速,  $T_{ij}$  为应力-能量张量 (stress-energy tensor) 的分量。该方程说明引力现象可以解释成黎曼流形的曲率性质。后来, 爱因斯坦为了使宇宙成为既不膨胀又不收缩的静态宇宙, 在方程式 (5.5.68) 的左边添加了一项  $g_{ij}A$ , 其中  $A$  为宇宙常数 (cosmological constant)。后来的宇宙观测结果表明, 宇宙正在膨胀。因此, 爱因斯坦的这种修改是不妥当的。

在真空中, 应力-能量张量为零, 所以方程式 (5.5.68) 变为:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} S g_{ij} \quad (5.5.69)$$

将里奇曲率张量与度量张量成比例的黎曼流形称为爱因斯坦流形 (Einstein manifold), 即  $\text{Ric} = \lambda g$ 。进一步将里奇曲率张量为零的黎曼流形称为里奇平坦流形 (Ricci-flat manifold)。

显然, 常曲率流形必是爱因斯坦流形。因此, 欧氏空间  $R^n$ 、球面  $S^n$  和双曲空间  $H^n$  都是爱因斯坦流形。另外, 具有富比尼-施图迪度量 (Fubini-Study metric) 的复射影空间  $CP^n$  和卡拉比-丘流形 (Calabi-Yau manifold) 也是爱因斯坦流形。富比尼-施图迪度量由意大利数学家富比尼 (G. Fubini, 1879—1943 年) 和德国数学家施图迪 (C. H. E. Study, 1862—1930 年) 分别在 1904 年和 1905 年各自独立引入。卡拉比-丘流形也被称为卡拉比-丘空间 (Calabi-Yau space), 是由意大利数学家卡拉比 (E. Calabi, 1923 年—) 在 1954 年首先加以研究的 (E. Calabi. *The space of Kähler metrics*. Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam, 1954, 2: 206—207)。同时在凯勒流形 (Kähler manifold) 上, 他提出了著名的好的黎曼度量存在性的卡拉比猜想 (Calabi conjecture)。丘成桐 (1949 年—) 在 1977 年和 1978 年证明了该猜想 ([1] S. T. Yau. *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1977, 74 (5): 1798—1799. [2] S. T. Yau. *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1978, 31 (3): 339—411.), 并因此获得 1982 年的菲尔兹奖 (Fields Prize)。卡拉比-丘流形是里奇平坦的凯勒流形, 其第一陈类为零。卡拉比-丘流形在超弦理论 (superstring theory) 研究中有着重要应用。

## 习 题 5

1. 设  $M$  为光滑流形, 映射  $\tau: X(M) \rightarrow X(M)$  是  $C^\infty(M)$  线性的。证明: 在流形  $M$  上存在唯一的 (1,1) 型光滑张量场  $\tilde{\tau}$ , 使得: 对  $\forall X \in X(M)$ ,  $\alpha \in A^1(M)$ , 有:

$$\tilde{\tau}(\alpha, X) = \alpha(\tau(X))$$

2. 计算下列外微分式的外微分:

- (1)  $xydx + ydy + y^2dz$ ;
- (2)  $xydz \wedge dx + (x + y^2z)dy \wedge dx$ ;
- (3)  $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ ;
- (4)  $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 。

3. 设  $f, g$  和  $h$  是  $R^3$  上的三个可导函数,  $(x, y, z)$  是  $R^3$  的直角坐标系, 证明:

$$df \wedge dg = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} dx \wedge dy + \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} dy \wedge dz + \begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix} dz \wedge dx$$

$$df \wedge dg \wedge dh = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz$$

4. 设  $(r, \theta, \varphi)$  是  $R^3$  的球坐标系,  $R^3$  的直角坐标和该球坐标的变换关系式为:  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , 求如下外微分式在球坐标系下的表达式:

(1)  $xdx + ydy + zdz$ ;

(2)  $dx \wedge dy + dy \wedge dz$ ;

(3)  $\frac{zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ;

(4)  $dx \wedge dy \wedge dz$ 。

5. 设  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , 求  $f^*\omega$ , 其中光滑映射  $f: R^2 \rightarrow R^2$  的定义为:

(1)  $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ ;

(2)  $f(u, v) = (\cosh v \cos u, -\sinh v \sin u)$ 。

6. 设映射  $f: R^n \setminus \{0\} \rightarrow R^n \setminus \{0\}$  的定义为  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ , 其中  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ ,  $\omega$  是  $n-1$  次外微分式:

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

求  $f^*\omega$ , 并且证明  $d(f^*\omega) = 0$ 。

7. 设  $M$  是光滑流形,  $X \in X(M)$ , 对  $\forall \alpha \in A^r(M)$ , 定义映射:

$$i(X)\alpha: \overbrace{X(M) \times \dots \times X(M)}^{r \uparrow} \rightarrow C^\infty(M)$$

为: 对  $\forall X_1, \dots, X_{r-1} \in X(M)$ , 有:

$$(i(X)\alpha)(X_1, \dots, X_{r-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{r-1})$$

证明: (1) 映射  $i(X): A^r(M) \rightarrow A^{r-1}(M)$  是  $C^\infty(M)$  线性的; (2) 对  $\forall \alpha \in A^r(M)$ ,  $\beta \in A^s(M)$ , 有:

$$i(X)(\alpha \wedge \beta) = (i(X)\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (i(X)\beta)$$

8. 计算球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  下的克里斯托弗符号, 其中直角坐标和球坐标的关系式为:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

9. 设  $(M, g)$  是黎曼流形, 证明黎曼曲率张量  $R$  的分量满足:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^j} \right) + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{jl}^h g_{sh} - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{il}^s g_{sh}$$

10. 设  $g$  为流形  $M$  的黎曼度量, 定义共形度量  $\tilde{g} = f^2 g$ , 其中  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f \neq 0$ 。记  $g$  和  $\tilde{g}$  的列维-齐维塔联络分别为  $D$  和  $\tilde{D}$ , 试推导  $D$  与  $\tilde{D}$  之间的关系式。



11. 设  $(M, g)$  为黎曼流形,  $R$  为黎曼曲率张量, 对  $\forall p \in M$ , 设  $X_p$  和  $Y_p$  为  $T_p M$  中的两个线性无关的切向量。

证明:

$$\frac{R(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2}$$

仅与  $X_p$  和  $Y_p$  所生成  $T_p M$  的二维截面  $\pi[X_p, Y_p]$  有关, 而与  $X_p$  和  $Y_p$  在  $\pi[X_p, Y_p]$  中的选取无关。

12. 利用结构方程证明舒尔定理 (Schur's Theorem): 维数大于等于 3 的连通迷向黎曼流形具有常曲率。

# 流形上的积分、微分算子和德拉姆上同调

大范围微分几何研究流形给定的几何实在的局部性质与该流形的整体性质之间的关系。

——陈省身

流形上的大范围分析是经典分析在流形上的现代拓展。因为流形是可以局部欧氏化的，所以流形上的局部分分析与欧氏空间上的经典分析是相仿的。而流形上的大范围分析则要复杂得多。

1945 年，在听了陈省身在美国数学会大会上作的题为《大范围微分几何若干新观点》的报告后，著名德国数学家霍普夫（H. Hopf, 1894—1971 年）说：“这篇演讲表明大范围微分几何的新时代开始了。”

流形上的大范围分析涉及几何、分析、拓扑和代数等多个数学分支的知识。1895 年，庞加莱发表了经典论文《拓扑》（*Analysis Situs*）。随后，他又在 1899 年、1900 年、1902 年、1904 年发表了 5 篇后续论文。这 6 篇论文是：

[1] H. Poincaré. *Analysis Situs*. Journal de l'École Polytechnique, 1895, 2 (1): 1-123.

[2] H. Poincaré. *Complément à l'Analysis Situs*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1899, 13: 285-343.

[3] H. Poincaré. *Second complément à l'Analysis Situs*. Proceedings of the London Mathematical Society, 1900, 32: 277-308.

[4] H. Poincaré. *Sur certaines surfaces algébriques: troisième complément à l'Analysis Situs*. Bulletin de la Société mathématique de France, 1902, 30: 49-70.

[5] H. Poincaré. *Sur les cycles des surfaces algébriques: quatrième complément à l'Analysis Situs*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1902, 8 (5): 169-214.

[6] H. Poincaré. *Cinquième complément à l'analysis situs*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1904, 18: 45-110.

这些论文奠定了代数拓扑学的发展基础，也为现代微分几何相关理论的发展提供了支撑。庞加莱考虑的单纯复形包含了微分拓扑学中处理的大多数有限维空间。抽象的链复形（chain complex）及其同调群（homology group）的定义出现在 1929 年，同调理论自此有了纯代数的框架。1935 年是代数拓扑学发展的转折点，其主要标志是上同调和同伦理论的建立。1935 年在前苏联莫斯科召开的国际拓扑学大会上，有四位数学家几乎同时独立地引入了上同调的概念，他们是美国数学家亚历山大（J. W. Alexander, 1888—1971 年）、美国数学家惠特尼、捷克数学家切赫（E. Čech, 1893—1960 年）、前苏联数学家柯尔莫哥洛夫（A. H. Kolmogorov, 1903—1987 年）。当其他三位在 1935 年前苏联莫斯科召开的国际拓扑学会议上宣布结果时，惠特尼的结果已经发表。由于上同调有环结构，所以上同调比同调包含更多的拓扑信息。美国数

学家艾伦伯格 (S. Eilenberg, 1913—1998 年) 与斯廷罗德 (N. E. Steenrod, 1910—1971 年) 在 1945 年以公理化的方法梳理了拓扑空间的上同调理论 (S. Eilenberg, N. E. Steenrod. *Axiomatic approach to homology theory*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1945, 31 (4): 117-120.)。法国数学家嘉当与美国数学家艾伦伯格在 1956 年合作出版的著作《同调代数》(*Homological Algebra*) 标志着同调代数理论发展的成熟。

在本章中, 首先建立流形上的积分概念, 并介绍斯托克斯定理, 然后讨论黎曼流形上的霍奇星算子、散度算子、梯度算子和余微分算子等微分算子, 接下来研究霍奇-德拉姆算子、拉普拉斯-贝尔特拉米及其特征值, 最后讨论闭流形上德拉姆上同调、霍奇分解定理和庞加莱对偶定理等。

## 6.1 流形的定向、流形上的积分和斯托克斯定理

流形上的积分是流形上微积分理论的重要组成部分。在可定向的光滑流形上, 可以利用单位分解定理构造出在流形上整体定义的积分。斯托克斯定理是流形上积分理论的基本工具, 它是欧氏空间中的多个积分公式在流形上的推广。斯托克斯定理将外微分式的外微分在流形上的积分与外微分式在流形边界上的积分联系起来。本节将建立光滑流形和黎曼流形上的积分概念, 并讨论流形上积分的重要结果——斯托克斯定理。

### 6.1.1 流形的定向

**定义 6.1.1 (可定向流形)** 设  $M$  是  $m$  维光滑流形, 若存在  $M$  的一个坐标卡集  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i) | \alpha \in I\}$ , 使得当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 局部坐标变换:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

的  $m$  阶雅可比行列式:

$$\det \left( \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^j} \right) > 0 \quad (6.1.1)$$

则称流形  $M$  是可定向的 (orientable)。称满足条件式 (6.1.1) 的两个局部坐标卡  $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)$  和  $(U_\beta, \varphi_\beta; x_\beta^i)$  是定向相符的 (consistent orientation) 或定向一致的。

根据定义可知, 可定向的流形就是一个存在定向相符的坐标卡构成坐标覆盖的流形。由定向相符的坐标卡构成的极大坐标卡集称为可定向流形  $M$  的一个定向。另外, 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 有:

$$dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = \det \left( \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^j} \right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m \quad (6.1.2)$$

**定理 6.1.1** 满足第二可数公理的  $m$  维流形  $M$  是可定向的, 当且仅当在流形  $M$  上存在一个处处不为零的  $m$  次外微分式。

**证明:** “ $\Rightarrow$ ”: 不妨设流形  $M$  是连通的, 因为即使流形  $M$  是不连通的, 它也是连通分支的并集。设  $\omega$  是流形  $M$  上的一个处处不为零的  $m$  次外微分式。对  $p \in M$ , 设  $(U, \varphi; x^i)$  是点  $p$  的一个局部坐标卡, 则:

$$\omega|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.3)$$

其中  $f \in C^\infty(U)$ , 并且  $f$  在  $U$  上处处不为零。若  $f > 0$ , 则称  $(U, \varphi; x^i)$  是流形  $M$  的一个正局部坐标卡。若  $f < 0$ , 令  $y^1 = -x^1$ ,  $y^s = x^s$ ,  $s = 2, \dots, m$ , 则易知  $(U, \varphi; y^i)$  是流形  $M$  的一个正局部坐标卡。这样, 可以获得流形  $M$  上的一个由正局部坐标卡构成的坐标覆盖  $\Sigma$ 。设  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$  是  $\Sigma$  中的任两个局部坐标卡, 并且  $U \cap V \neq \emptyset$ , 则:

$$\omega|_{U \cap V} = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.4)$$

$$\omega|_{U \cap V} = h dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m = h \det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.5)$$

根据式 (6.1.4) 和式 (6.1.5), 有:

$$\det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) = \frac{f}{h} > 0$$

所以,  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$  是定向一致的。因此, 流形  $M$  是可定向的。

“ $\Leftarrow$ ”: 设流形  $M$  是可定向的,  $\Sigma$  是流形  $M$  上的一个由正局部坐标卡构成的定向一致的坐标覆盖。因为流形  $M$  满足第二可数公理, 故存在流形  $M$  的一个由可数多个成员构成的局部有限坐标开覆盖  $\Sigma_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)\}$  和从属于  $\Sigma_0$  的一个单位分解  $\{f_\alpha\}$ , 令:

$$\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$$

对  $p \in M$ , 有:

$$\omega(p) = \sum_\alpha f_\alpha(p) \det \left( \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m$$

根据  $f_\alpha \geq 0$  和  $\det \left( \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) > 0$  可知,  $\omega$  是流形  $M$  上的一个处处不为零的  $m$  次外微分式。证毕。

根据定理 6.1.1, 可以建立正局部坐标卡覆盖和一个处处不为零的  $m$  次外微分式  $\omega$  的对应。因此, 也说可定向流形  $M$  的定向由  $\omega$  给定。

**定理 6.1.2** 设  $M$  是一个  $m$  维的可定向带边光滑流形, 则边界  $\partial M$  是流形  $M$  的一个  $m-1$  维的可定向子流形。

读者可利用边界  $\partial M$  的坐标变换的雅可比行列式来证明该定理。

**定义 6.1.2 (流形边界上的诱导定向)** 设  $M$  是  $m$  维的可定向带边光滑流形,  $\Sigma = \{(U, \varphi; x^i)\}$  是与流形  $M$  的定向一致的一个坐标覆盖。对  $\forall (U, \varphi; x^i) \in \Sigma$ , 当:

$$\tilde{U} = U \cap \partial M = \{(x^1, \dots, x^m) \in U \mid x^m = 0\} \neq \emptyset$$

时, 在  $\tilde{U}$  上取局部坐标系  $((-1)^m x^1, \dots, x^{m-1})$ ,  $(-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}$  给出了  $\tilde{U}$  的一个定向, 由这样的局部坐标系在  $\partial M$  上所确定的定向称为流形  $M$  的定向在边界  $\partial M$  上的诱导定向 (induced orientation)。

**【例 6.1.1】** 当  $D$  是平面  $R^2$  上的一个带边区域时, 对  $\forall p \in \partial D$ , 设  $(U; x^1, x^2)$  是点  $p$  处与  $R^2$  的定向一致的局部坐标系, 则  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  与  $\partial D$  相切, 而  $\frac{\partial}{\partial x^2}$  指向区域  $D$  的内部。

这样, 区域  $D$  的定向在边界上的诱导定向由  $(-1)^2 dx^1 = dx^1$  给出。如图 6.1.1 所示, 这与

经典分析中的“沿边界 $\partial D$ 行进, 区域 $D$ 在行进者的左侧, 则该方向是边界 $\partial D$ 的正向”规定是一致的。

当 $D$ 是平面 $R^3$ 上的一个带边区域时, 对 $\forall p \in \partial D$ , 设 $(U; x^1, x^2, x^3)$ 是点 $p$ 处与 $R^3$ 的定向一致的局部坐标系, 则 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}$ 与 $\partial D$ 相切, 而 $\frac{\partial}{\partial x^3}$ 指向区域 $D$ 的外部。区域 $D$ 的定向在边界上的诱导定向由 $(-1)^3 dx^1 \wedge dx^2 = -dx^1 \wedge dx^2$ 给出, 即取边界 $\partial D$ 的外法向为 $\partial D$ 的正向。

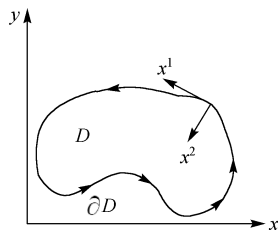


图 6.1.1 区域边界  
诱导定向

一般地, 若 $M$ 是偶数维带边流形, 则流形 $M$ 的定向在 $\partial M$ 上的诱导定向是 $\partial M$ 的内法向; 若 $M$ 是奇数维带边流形, 则流形 $M$ 的定向在 $\partial M$ 上的诱导定向是 $\partial M$ 的外法向。

## 6.1.2 光滑流形上的积分

**定义 6.1.3 (支撑集)** 设 $M$ 是满足第二可数公理的定向的 $m$ 维光滑流形,  $\omega$ 为流形 $M$ 上的一个 $r$ 次外微分式, 称:

$$\text{supp } \omega = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}}$$

为 $\omega$ 的支撑集 (support set), 简称支集。用 $A_0^r(M)$ 表示光滑流形 $M$ 上具有紧致支撑集的 $r$ 次外微分式构成的集合。

下面来定义 $\omega \in A_0^m(M)$ 在光滑流形 $M$ 上的积分。定义方法仍是采用由局部到整体的思路: 先在局部上加以定义, 然后利用单位分解加以拼接, 构造流形整体上的积分。在 5.2 节中, 我们也曾采用该思路来证明黎曼度量的存在性。

局部上, 先来考虑特殊的 $m$ 次外微分式, 设 $\omega \in A_0^m(M)$ , 并且存在流形 $M$ 的一个与流形定向相符的坐标卡 $(U, \varphi; x^i)$ , 使得 $\text{supp } \omega \subset U$ 。那么, 有:

$$\omega|_{M \setminus U} = 0, \quad \omega|_U = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

式中,  $a \in C^\infty(U)$ ,  $\text{supp } a \subset \text{supp } \omega \subset U$ 。

如图 6.1.2 所示,  $a \circ \varphi^{-1}$ 是由 $R^m$ 到 $R$ 的多元函数。故 $\int_{\varphi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^m$ 是 $m$ 重黎曼积分。注意到 $a$ 的支集 $\text{supp } a \subset U$ 是紧致的, 所以 $\int_{\varphi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^m$ 是有限值。令:

$$\int_M \omega = \int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^m \quad (6.1.6)$$

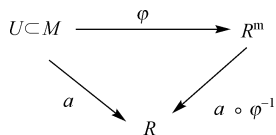


图 6.1.2 映射复合关系图

验证可知该定义与局部坐标卡的选取无关。事实上, 设 $(V, \psi; y^j)$ 是另一个与流形 $M$ 定向相符的坐标卡, 且 $\text{supp } \omega \subset V$ , 则同样有:

$$\omega|_{M \setminus V} = 0, \quad \omega|_V = b dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m$$

式中,  $b \in C^\infty(V)$ 。所以, 在 $(V, \psi; y^j)$ 上, 有 $\omega|_{U \cap V} = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ ; 同时, 有:

$$\begin{aligned} \omega|_{U \cap V} &= b dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m \\ &= b \left( \frac{\partial y^1}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left( \frac{\partial y^m}{\partial x^{i_m}} dx^{i_m} \right) \\ &= b \frac{\partial(y^1, \cdots, y^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

由此可得：

$$a \circ \varphi^{-1} = (b \circ \psi^{-1})(\psi \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \quad (6.1.8)$$

因为光滑流形  $M$  可定向, 并且坐标卡  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  是与流形  $M$  定向相符的两个坐标卡。

所以, 坐标变换  $\psi \circ \varphi^{-1}$  的雅可比行列式  $\frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} > 0$ 。所以, 有:

$$\begin{aligned} & \int_{\psi(V)} (b \circ \psi^{-1}) dy^1 \cdots dy^m \\ &= \int_{\psi(U \cap V)} (b \circ \psi^{-1}) dy^1 \cdots dy^m \\ &= \int_{\psi(U \cap V)} (b \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \left| \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right| dx^1 \cdots dx^m \\ &= \int_{\psi(U \cap V)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^m \\ &= \int_{\phi(U)} (a \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^m \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

因此, 定义式 (6.1.6) 与坐标卡的选择无关, 定义是合理的。

然后, 利用单位分解这一重要工具来构造  $\omega \in A_0^m(M)$  在流形  $M$  上的整体积分。设  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  是与流形  $M$  定向相符的坐标卡集, 并且  $\{U_\alpha\}$  是局部有限的。因为流形  $M$  满足第二可数公理, 所以, 有从属于  $\{U_\alpha\}$  的单位分解  $\{h_\alpha\}$ , 满足:

$$\begin{aligned} h_\alpha &\in C^\infty(M) \\ \text{supp } h_\alpha &\subset U_\alpha \\ \sum_\alpha h_\alpha &= 1 \end{aligned}$$

则

$$\omega = \left( \sum_\alpha h_\alpha \right) \omega = \sum_\alpha h_\alpha \cdot \omega \quad (6.1.10)$$

令

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_M \sum_\alpha (h_\alpha(\omega)) = \sum_\alpha \int_M h_\alpha(\omega) \\ &= \sum_\alpha \int_{\varphi(U_\alpha)} ((h_\alpha \cdot \omega) \circ \varphi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

应该注意到求和必须是有限项, 这样才可保证得到的是一个有限数。而

$$\text{supp}(h_\alpha \cdot \omega) = \text{supp } h_\alpha \cap \text{supp } \omega$$

又因为  $\text{supp } h_\alpha \subset U_\alpha$ , 所以有:

$$\text{supp}(h_\alpha \cdot \omega) \subset U_\alpha \cap \text{supp } \omega$$

因为  $\{U_\alpha\}$  是局部有限的,  $\text{supp } \omega$  是紧致的, 所以  $\text{supp } \omega$  至多只与坐标卡集  $\{U_\alpha\}$  中的有限多个坐标卡  $U_\alpha$  相交。所以式 (6.1.11) 的右端只是有限多项的和。

另外, 还需说明该定义式 (6.1.11) 与从属于  $\{U_\alpha\}$  的单位分解  $\{h_\alpha\}$  的选取无关。事实上, 设  $g_\beta$  是从属于  $\{U_\beta\}$  的另一组单位分解, 则:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta} \int_M g_{\beta} \cdot \omega &= \sum_{\beta} \int_M \left( \sum_{\alpha} h_{\alpha} \right) g_{\beta} \cdot \omega = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \int_M h_{\alpha} \cdot g_{\beta} \cdot \omega \\
&= \sum_{\alpha} \int_M \left( \sum_{\beta} g_{\beta} \right) h_{\alpha} \cdot \omega = \sum_{\alpha} \int_M h_{\alpha} \cdot \omega
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

**定义 6.1.4** ( $m$  次外微分式在流形上的积分) 设  $M$  是满足第二可数公理的定向的  $m$  维光滑流形,  $\omega$  是流形  $M$  上具有紧致支集的  $m$  次外微分式,  $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}; x_{\alpha}^i)\}$  是与流形  $M$  定向相符的一个坐标卡集,  $\{h_{\alpha}\}$  是从属于  $\{U_{\alpha}\}$  的单位分解, 称:

$$\begin{aligned}
\int_M \omega &= \int_M \sum_{\alpha} (h_{\alpha}(\omega)) = \sum_{\alpha} \int_M h_{\alpha}(\omega) \\
&= \sum_{\alpha} \int_{\varphi(U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot \omega) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) dx_{\alpha}^1 \cdots dx_{\alpha}^m
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

为  $\omega$  在流形  $M$  上的积分 (integral)。

容易验证如下定理成立。

**定理 6.1.3** 设  $M$  是满足第二可数公理的定向的  $m$  维光滑流形,  $\omega$  和  $\eta$  是流形  $M$  上具有紧致支集的  $m$  次外微分式,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , 则:

$$\int_M (\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda \int_M \omega + \mu \int_M \eta \tag{6.1.14}$$

### 6.1.3 黎曼流形上的积分

下面考虑黎曼流形的情形。设  $(U, x^i)$  和  $(V, y^j)$  是  $m$  维定向黎曼流形  $(M, g)$  的两个与其定向相符的局部坐标系, 当  $U \cap V \neq \emptyset$  时, 有:

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, n$$

令  $\tilde{g}_{pq} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^p}, \frac{\partial}{\partial y^q}\right)$ ,  $\tilde{G} = \det(\tilde{g}_{pq})$ , 则:

$$\tilde{g}_{pq} = g\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial y^q} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \frac{\partial x^j}{\partial y^q} g_{ij} \tag{6.1.15}$$

由此可得两个局部坐标系的度量系数矩阵行列式的关系为:

$$\tilde{G} = \left( \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right)^2 \det(g_{ij}) = \left( \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right)^2 G \tag{6.1.16}$$

因为  $(U, x^i)$  和  $(V, y^j)$  与流形的定向相符, 所以  $\frac{\partial(x^1 \wedge \dots \wedge x^n)}{\partial(y^1 \wedge \dots \wedge y^n)} > 0$ 。故:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tilde{G}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n &= \sqrt{\tilde{G}} \frac{\partial y^1}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y^n}{\partial x^{i_n}} dx^{i_n} \\
&= \sqrt{\tilde{G}} \frac{\partial(y^1 \wedge \dots \wedge y^n)}{\partial(x^1 \wedge \dots \wedge x^n)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \sqrt{G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n
\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

所以,  $\sqrt{G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  是黎曼流形  $M$  上的大范围定义的外微分式。由此引入黎曼流形体积元的定义。

**定义 6.1.5 (黎曼流形的体积元)** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向的黎曼流形,  $\{(U; x^i)\}$  是与流形  $M$  定向相符的一个坐标卡集, 令  $G = \det(g_{ij})$ , 其中  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$  为度量系数, 称:

$$dV = \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

为黎曼流形  $(M, g)$  的体积元 (volume element)。

**定义 6.1.6 (外微分式的局部内积和整体内积)** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向的黎曼流形,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

和

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq m} \eta_{j_1 \cdots j_r} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

为流形  $M$  上的两个  $r$  次外微分式, 定义  $\omega$  和  $\eta$  的局部内积 (local inner product) 为:

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} \omega_{i_1 \cdots i_r} \eta_{i_1 \cdots i_r} \quad (6.1.18)$$

进而定义  $\omega$  和  $\eta$  的整体内积 (global inner product) 为:

$$(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle dV \quad (6.1.19)$$

易知局部内积是对称的, 即:

$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \eta, \omega \rangle \quad (6.1.20)$$

验证可知整体内积是对称的、正定的双线性型, 即有:

(1) 正定性: 对  $\forall \omega \in A(M)$ , 有  $(\omega, \omega) \geq 0$ , 其中等号成立当且仅当  $\omega = 0$ 。

(2) 对称性: 对  $\forall \omega, \eta \in A^r(M)$ , 有:

$$(\omega, \eta) = (\eta, \omega) \quad (6.1.21)$$

特别地, 若  $(\omega, \eta) = 0$ , 则称  $\omega$  和  $\eta$  是正交的 (orthogonal)。称  $\|\omega\| = \sqrt{(\omega, \omega)}$  是  $\omega$  的模 (norm)。

设  $r < m$ ,  $N$  是满足第二可数公理的  $r$  维定向光滑流形,  $\varphi: N \rightarrow M$  是  $M$  的光滑嵌入子流形。对  $\omega \in A_0^r(M)$ , 有  $\varphi^* \omega \in A_0^r(N)$ , 所以  $\int_N \varphi^* \omega$  是有意义的。若  $(N, \varphi)$  是  $M$  的浸入子流形, 则上述积分也是有意义的。

## 6.1.4 斯托克斯定理

流形上的斯托克斯定理是物理学中的开尔文-斯托克斯公式 (Kelvin-Stokes formula) 的推广。1850 年, 被后人誉为“热力学之父”的英国数学物理学家开尔文 (W. T. Kelvin, 1824—1907 年) 通过信件将这个定理告诉了爱尔兰数学家、物理学家斯托克斯 (G. G. Stokes, 1819—1903 年)。而斯托克斯则将这个定理作为 1854 年史密斯奖 (Smith's Prize) 的问题。1861 年, 德国数学家汉克尔 (H. Hankel, 1839—1873 年) 首次发表了这个定理。庞加莱在 1899 年给出了一般的斯托克斯定理的证明。

因为斯托克斯定理是流形上整体结果, 所以该定理的证明思路仍是采用局部到整体的思路: 微分流形在局部上同胚于欧氏空间, 这样可以将流形上的积分转化为欧氏空间中的多重积分, 然后利用单位分解这一重要工具将局部上结果“粘接”获得流形上的整体结果。我们在黎曼几何基本定理证明中也采用过这个证明思路。



**定理 6.1.4 (斯托克斯定理)** 设  $M$  是满足第二可数公理的  $m$  维定向光滑流形,  $\omega$  是流形  $M$  上具有紧致支集的  $m-1$  次外微分式, 则:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (6.1.22)$$

其中  $M$  的边界  $\partial M$  具有由  $M$  的定向所诱导的定向。若  $\partial M = \emptyset$ , 则:

$$\int_M d\omega = 0 \quad (6.1.23)$$

**证明:** 设  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$  是流形  $M$  的一个与其定向相符的局部有限坐标覆盖,  $\{h_\alpha | \alpha \in I\}$  是从属于该坐标覆盖的单位分解, 则  $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega$ 。这样, 有:

$$\int_M d\omega = \sum_\alpha \int_M d(h_\alpha \omega)$$

和

$$\int_{\partial M} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial M} h_\alpha \omega$$

支集  $\text{supp} \omega$  的紧致性保证其只与有限多个  $\{U_\alpha\}$  相交, 所以只要证明式 (6.1.24) 对每个  $\alpha \in I$  都成立即可:

$$\int_M d(h_\alpha \omega) = \int_{\partial M} h_\alpha \omega \quad (6.1.24)$$

而  $\text{supp}(h_\alpha \omega) \subset \text{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$ , 所以不妨设支集  $\text{supp} \omega$  包含在流形的一个与其定向相符的坐标卡  $\{(U, \varphi; x^i)\}$  内。这样, 设  $\omega$  在  $U$  中的局部坐标表达式为:

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.25)$$

其中  $f^i \in C^\infty(U)$ 。故:

$$d\omega|_U = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.26)$$

下面分两种情况加以证明。当  $U \cap \partial M = \emptyset$  时, 因为  $\text{supp} \omega \subset U$ , 所以  $\omega$  在  $\partial M$  上的限制为零, 由此可得  $\int_{\partial M} \omega = 0$ 。下面来证明  $\int_M d\omega = 0$ 。事实上, 此时的  $U$  包含在流形  $M$  的内部, 故:

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^m \int_U \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \quad (6.1.27)$$

因为  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , 所以在  $\mathbb{R}^m$  中可取到一个正方体区域:

$$C = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m | -a \leq x^i \leq a, 1 \leq i \leq m\}$$

使得  $\varphi(U) \subset C$ 。注意到  $\text{supp}(f^i \circ \varphi) \subset \varphi(U)$ , 故可将  $f^i \circ \varphi^{-1}$  延拓成  $C$  上的光滑函数, 使得它在  $C \setminus \varphi(U)$  上为零。据此有:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i &= (f^i \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{i-1}, a, x^{i+1}, \dots, x^m) - \\ &\quad (f^i \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{i-1}, -a, x^{i+1}, \dots, x^m) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

从而, 有

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \sum_{i=1}^m \int_U \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\varphi(U)} \frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a \frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \hat{dx}^i \cdots dx^m \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.1.29}$$

故此时式 (6.1.22) 成立。

当  $U \cap \partial M \neq \emptyset$  时, 不妨设坐标卡  $(U, \varphi)$  满足:

$$U \cap M = \{p \in U \mid x^m = (\varphi(p))^m \geq 0\}$$

和

$$U \cap \partial M = \{p \in U \mid x^m = (\varphi(p))^m = 0\}$$

在  $R^m$  中取区域:

$$\tilde{C} = \{(x^1, \dots, x^m) \in R^m \mid -a \leq x^i \leq a, 1 \leq i \leq m-1; 0 \leq x^m \leq a\}$$

使得  $\varphi(U) \subset \tilde{C}$ 。同样将  $f^i \circ \varphi^{-1}$  延拓成  $\tilde{C}$  上的光滑函数, 使得它在  $\tilde{C} \setminus \varphi(U)$  上为零。这样, 有:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \int_{U \cap \partial M} \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} f^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^m \\
&= (-1)^{m+1} \int_{U \cap \partial M} f^m dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}
\end{aligned} \tag{6.1.30}$$

式中,  $dx^i$  上方的三角符号表示  $dx^i$  在外积中不出现。因为流形  $M$  的定向是由  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$  给定的, 所以流形  $M$  的边界  $\partial M$  的诱导定向由  $(-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}$  给定。所以, 有:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= (-1) \int_{\varphi(U) \cap \partial R_+^m} (f^m \circ \varphi^{-1}) dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= - \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a (f^m \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}
\end{aligned} \tag{6.1.31}$$

式中,  $R_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \in R^m \mid x^m \geq 0\}$ 。而

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{U \cap M} d\omega = \sum_{i=1}^m \int_U \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\varphi(U)} \frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^m \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a \frac{\partial(f^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \hat{dx}^i \cdots dx^m + \\
&\quad \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a \frac{\partial(f^m \circ \varphi^{-1})}{\partial x^m} dx^m \right) dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a (f^m \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{m-1}, a) dx^1 \cdots dx^{m-1} - \\
&\quad \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a (f^m \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1} \\
&= - \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a (f^m \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{m-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{m-1}
\end{aligned} \tag{6.1.32}$$

根据式 (6.1.31) 和式 (6.1.32) 可知式 (6.1.22) 成立。证毕。

流形上的斯托克斯定理统一、推广了欧氏空间中的牛顿-莱布尼兹公式 (Newton-Leibniz formula)、格林-黎曼公式 (Green-Riemann formula)、高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式 (Gauss-Ostrogradski formula)、开尔文-斯托克斯公式。后三个公式也简称为格林公式、高斯公式和斯托克斯公式。

【例 6.1.2 (牛顿-莱布尼兹公式)】 设  $D=[a,b]\subset R$ , 则  $D$  的边界为  $\partial D=\{a\}\cup\{b\}$ 。对  $f\in C^1[a,b]$ , 有:

$$\int_a^b df = \int_D df = \int_{\partial D} f = f(b) - f(a) \quad (6.1.33)$$

【例 6.1.3 (格林-黎曼公式)】 设  $D$  是平面  $R^2$  上由正则闭曲线  $C$  所围成的区域,  $D$  的定向与  $R^2$  的定向一致,  $\partial D$  的定向由  $D$  诱导产生 (即  $\partial D$  的正向与指向  $D$  内部的法向量构成与  $R^2$  定向一致的标架)。令  $\omega = Pdx + Qdy$ , 其中  $P, Q$  是  $D$  上的连续可微函数, 则:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

所以, 利用斯托克斯定理和式 (6.1.34), 可得:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (6.1.35)$$

【例 6.1.4 (高斯-奥斯特罗格拉德斯基公式)】 设  $D$  是  $R^3$  中由曲面  $\Sigma$  所围成的有界区域,  $D$  的定向与  $R^3$  的定向一致, 以外法线方向为正向诱导出  $\partial D$  的定向。令:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

其中  $P, Q, R$  是  $D$  上的连续可微函数, 则:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

所以, 利用斯托克斯定理和式 (6.1.36), 可得:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \int_{\partial D} \omega \\ &= \int_D d\omega \\ &= \iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

【例 6.1.5 (开尔文-斯托克斯公式)】 设  $\Sigma$  是  $R^3$  中的一个定向曲面。如图 6.1.3 所示, 边界  $\partial \Sigma$  为定向闭曲线  $C$ ,  $\partial \Sigma$  的正向与  $\Sigma$  的正向法向量符合右手法则。

令  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , 其中  $P, Q, R$  是  $D$  上的连续可微函数, 则:

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \\ &\quad \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned} \quad (6.1.38)$$

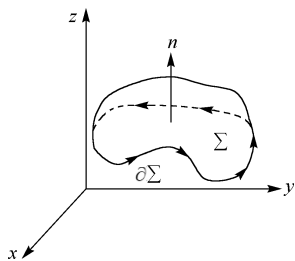


图 6.1.3 定向曲面的  
边界定向

所以, 利用斯托克斯定理和式 (6.1.38), 可得:

$$\begin{aligned}\int_C Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega \\ &= \iint_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right]\end{aligned}\quad (6.1.39)$$

**【例 6.1.6】** 证明: 设  $D$  是  $C$  的一个开集, 复值函数  $f: D \rightarrow C$  是解析的当且仅当  $\omega = f(z)dz$  在  $D$  中是闭的。

**证明:** 令  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则:

$$\omega = f(z)dz = [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy)$$

“ $\Leftarrow$ ”: 设  $\omega = f(z)dz$  在  $D$  中是闭的, 因为:

$$\begin{aligned}d\omega &= [du(x, y) + idv(x, y)] \wedge (dx + idy) \\ &= du \wedge dx - dv \wedge dy + i[du \wedge dx + dv \wedge dy] \\ &= -\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy\end{aligned}\quad (6.1.40)$$

所以, 柯西-黎曼方程 (Cauchy-Riemann equations) 成立, 即复值函数  $f: D \rightarrow C$  是解析的。

“ $\Rightarrow$ ”: 设复值函数  $f: D \rightarrow C$  是解析的, 因为:

$$\omega = f(z)dz = udx - vdy + i(vdx + udy)$$

所以令

$$\omega_1 = udx - vdy, \quad \omega_2 = vdx + udy$$

这样, 有:

$$d\omega_1 = -\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0, \quad d\omega_2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0\quad (6.1.41)$$

从而,  $\omega = f(z)dz$  在  $D$  中是闭的。证毕。

利用上述结论, 可以进一步推导: 设复值函数  $f: D \rightarrow C$  是解析的, 并且在  $\bar{D}$  中连续, 则根据斯托克斯定理有:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_L \omega_1 + i \int_L \omega_2 = \int_D d\omega_1 + \int_D d\omega_2\quad (6.1.42)$$

其中  $L = \partial D$  是有向边界。故:

$$\int_L f(z)dz = 0\quad (6.1.43)$$

这就是复变函数论中的柯西积分定理 (Cauchy's integral theorem)。

## 6.2 黎曼流形上的微分算子

在微分流形上考虑微分算子的思想至少可追溯到德国数学家黎曼和意大利数学家贝尔特拉米 (E. Beltrami, 1835—1900 年) 的工作。

本节将讨论黎曼流形上的几类重要的微分算子: 霍奇星算子、散度算子、梯度算子和余微分算子等定义和性质。这几类算子也是在 6.3 节引入霍奇-德拉姆算子和拉普拉斯-贝尔特拉米算子的基础。

### 6.2.1 霍奇星算子

霍奇星算子 (Hodge stare operator) 也称为霍奇对偶 (Hodge dual), 是由苏格兰数学家霍奇 (W. V. D. Hodge, 1903—1975 年) 引入的。利用霍奇星算子可以生成梯度算子、余微分算子等微分算子。

**定义 6.2.1 (霍奇星算子)** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向的黎曼流形, 矩阵  $(g^{ij})$  为度量系数矩阵  $(g_{ij})$  的逆矩阵, 定义霍奇星算子  $*$ :  $A^r(M) \rightarrow A^{m-r}(M)$  为: 对  $\forall \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in A^r(M)$ , 有:

$$*\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \sqrt{G} \delta_{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_m}^{1 \dots m} \omega^{i_1 \dots i_r} dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_m}$$

式中,  $\omega^{i_1 \dots i_r} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_r j_r} \omega_{j_1 \dots j_r}$ , 称  $*\omega$  为  $\omega$  的伴随形式 (adjoint form)。

在上述定义中, 规定了求和指标的大小顺序, 如果不规定求和指标的大小顺序,  $*\omega$  也可以表示为:

$$*\omega = \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!} \delta_{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_m}^{1 \dots m} \omega^{i_1 \dots i_r} dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_m}$$

根据定义可知, 霍奇星算子满足  $C^\infty(M)$  线性, 即  $\forall \omega_1, \omega_2 \in A^r(M)$ ,  $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ , 有:

$$*(f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2) = f_1 * \omega_1 + f_2 * \omega_2 \quad (6.2.1)$$

**定理 6.2.1** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向的黎曼流形, 对  $\forall \omega, \eta \in A^r(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , 有:

$$dV = *1, \quad 1 = *(dV) \quad (6.2.2)$$

$$**\omega = *(*\omega) = (-1)^{r(m-r)} \omega \quad (6.2.3)$$

$$\omega \wedge (*\eta) = \eta \wedge (*\omega) = \langle \omega, \eta \rangle dV \quad (6.2.4)$$

$$(*\omega, *\eta) = (\omega, \eta) \quad (6.2.5)$$

**证明:** 读者可根据定义自证式 (6.2.2) 和式 (6.2.3)。下证式 (6.2.4) 和式 (6.2.5)。对  $\forall \omega, \eta \in A^r(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} \omega \wedge (*\eta) &= \left( \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right) \wedge \left( \frac{\sqrt{G}}{r!(m-r)!} \delta_{j_1 \dots j_r j_{r+1} \dots j_m}^{1 \dots m} \eta^{j_1 \dots j_r} dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \right) \\ &= \frac{\sqrt{G}}{r!r!(m-r)!} \omega_{i_1 \dots i_r} \eta^{j_1 \dots j_r} \delta_{j_1 \dots j_r j_{r+1} \dots j_m}^{1 \dots m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\ &= \frac{\sqrt{G}}{r!r!(m-r)!} \omega_{i_1 \dots i_r} \eta^{j_1 \dots j_r} \delta_{j_1 \dots j_r j_{r+1} \dots j_m}^{1 \dots m} \delta_{1 \dots m}^{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_m} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{\sqrt{G}}{r!r!} \omega_{i_1 \dots i_r} \eta^{j_1 \dots j_r} \delta_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{\sqrt{G}}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} \eta^{i_1 \dots i_r} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \left( \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} \eta^{i_1 \dots i_r} \right) (\sqrt{G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \\ &= \langle \omega, \eta \rangle dV \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

同时, 根据整体内积的对称性和式 (6.2.6) 可知:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle dV = \langle \omega, \eta \rangle dV \quad (6.2.7)$$

整合式 (6.2.6) 和式 (6.2.7) 可知式 (6.2.4) 成立。利用式 (6.2.3) 和外积的反交换性, 有:

$$\begin{aligned} (*\omega, *\eta) &= \int_M \langle *\omega, *\eta \rangle dV = \int_M *\omega \wedge *(*\eta) \\ &= (-1)^{r(m-r)} \int_M *\omega \wedge \eta = \int_M \eta \wedge *\omega \\ &= \int_M \langle \eta, \omega \rangle dV = (\eta, \omega) = (\omega, \eta) \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

即式 (6.2.5) 成立。证毕。

利用式 (6.2.4) 可知: 对  $\forall \omega, \eta \in A^r(M)$ ,

$$(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle dV = \int_M \omega \wedge *\eta \quad (6.2.9)$$

再利用整体内积的正定性, 可得如下推论。

**推论 6.2.1** 设  $(M, g)$  是  $m$  维的定向黎曼流形, 对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 有:

$$\omega \wedge *\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \quad (6.2.10)$$

特别地, 若  $\{\omega^i\}$  是  $m$  维定向黎曼流形  $(M, g)$  上的一个与其定向相符的单位正交余标架场, 则  $G=1$ ,  $\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \mid i_1 < \cdots < i_r\}$  是处处单位正交的。此时, 有:

$$*(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}) = \delta_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_m} \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \quad (6.2.11)$$

式中,  $i_{r+1}, \cdots, i_m$  是  $i_1, \cdots, i_r$  的互补指标。如:

$$*(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r) = \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^m \quad (6.2.12)$$

**【例 6.2.1】** 设  $dx, dy, dz$  为  $R^3$  的一组单位正交的一次外微分式, 并且与  $R^3$  的定向相符。那么:

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy \quad (6.2.13)$$

设  $P, Q, R$  为  $R^3$  上的连续可微函数, 对  $R^3$  上的一次外微分式  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , 有:

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

这样, 有:

$$*d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dy + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dz$$

## 6.2.2 散度算子和梯度算子

设  $(M, g)$  是  $m$  维的定向黎曼流形, 对一次外微分式  $\theta = \theta_i dx^i$ , 有:

$$\begin{aligned} *\theta &= \frac{\sqrt{G}}{(m-1)!} \delta_{ij_2 \cdots j_m}^{1 \cdots m} \theta^i dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_m} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \eta_{ij_2 \cdots j_m} \theta^i dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_m} \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

对式 (6.2.14) 两边外微分可得:

$$\begin{aligned}
 d(*\theta) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial}{\partial x^k} (\theta^i \eta_{ij_2 \dots j_m}) dx^k \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} (\theta^i \eta_{ij_2 \dots j_m})_{,k} dx^k \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \theta^i_{,k} \eta_{ij_2 \dots j_m} dx^k \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \sum_{j < k} \theta^i_{,k} \eta_{ij_2 \dots j_m} dx^k \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \sum_i \sum_{j < k} \theta^i_{,i} \eta_{ij_2 \dots j_m} dx^i \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \sum_i \theta^i_{,i} \sum_{j < k} \eta_{ij_2 \dots j_m} dx^i \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_m} \\
 &= \sum_i \theta^i_{,i} \eta
 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

**定义 6.2.2 (一次外微分式的散度)** 设  $\{U; x^i\}$  为  $m$  维的定向黎曼流形  $M$  的一个局部坐标系, 称:

$$\operatorname{div} \theta = \sum_i \theta^i_{,i} \tag{6.2.16}$$

为一次外微分式  $\theta = \theta_i dx^i$  的散度 (divergence)。

利用斯托克斯定理和式 (6.2.16) 可得以下结论。

**定理 6.2.2** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向的紧致黎曼流形, 并且具有光滑边界  $\partial M$ , 对  $\forall \theta \in A^1(M)$ , 有:

$$\int_M (\operatorname{div} \theta) dV = \int_{\partial M} *\theta \tag{6.2.17}$$

式中,  $\partial M$  的定向为流形  $M$  的诱导定向。

**推论 6.2.2** 设  $(M, g)$  是一个  $m$  维的具有光滑边界的紧致定向黎曼流形, 若  $\partial M = \emptyset$  或  $\theta|_{\partial M} = 0$ , 则:

$$\int_M (\operatorname{div} \theta) dV = 0 \tag{6.2.18}$$

对一次外微分式的对偶向量——光滑切向量场, 也可以定义它的散度。设  $\{U; x^i\}$  为  $m$  维黎曼流形  $M$  的局部坐标系, 光滑切向量场  $X$  在  $U$  上的限制  $X|_U$  可分量表示为  $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 则:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
 &= \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} = \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}
 \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

又因为

$$\nabla X|_U = \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j = X^i_{,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \tag{6.2.20}$$

由此引入光滑切向量场  $X$  的散度定义。

**定义 6.2.3 (切向量场的散度)** 设  $(M, g)$  为黎曼流形, 对  $\forall X \in X(M)$ , 定义:

$$\operatorname{div} X|_U = \sum_i X^i_{,i} = \sum_i \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_k X^k \Gamma^i_{ki} \right) \quad (6.2.21)$$

称映射  $\operatorname{div}: X(M) \rightarrow X(M)$ ,  $X \mapsto \operatorname{div} X$  为散度算子 (divergence operator)。称  $\operatorname{div} X$  为光滑切向量场  $X$  的散度。

易知, 对  $\forall \lambda, \mu \in R$ , 有:

$$\operatorname{div}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \operatorname{div} X + \mu \operatorname{div} Y \quad (6.2.22)$$

所以, 对光滑切向量场而言, 散度算子是一阶线性微分算子。

**定理 6.2.3** 设  $(U; x^i)$  为黎曼流形  $(M, g)$  的一个局部坐标卡,  $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 则:

$$\operatorname{div} X|_U = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} X^i) \quad (6.2.23)$$

式中,  $G = \det(g_{ij})$ 。

**证明:** 因为

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} \quad (6.2.24)$$

代入式 (6.2.21), 有:

$$\operatorname{div} X|_U = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} X^i) \quad (6.2.25)$$

证毕。

对具有紧致支集的光滑切向量场, 可以证明如下散度定理成立。

**定理 6.2.4 (散度定理)** 设  $(M, g)$  形为黎曼流形,  $X \in X(M)$ , 并且  $X$  具有紧致支集, 则

$$\int_M \operatorname{div} X = 0 \quad (6.2.26)$$

下面来讨论梯度算子。

**定义 6.2.4 (梯度算子)** 设  $(M, g)$  形为黎曼流形, 定义梯度算子 (gradient operator)  $\operatorname{grad}: C^\infty(M) \rightarrow X(M)$ ,  $f \mapsto \operatorname{grad}(f)$  为: 对  $\forall X \in X(M)$ , 有:

$$g(X, \operatorname{grad}(f)) = X(f) = df(X) \quad (6.2.27)$$

称  $\operatorname{grad}(f)$  为  $f$  的梯度 (gradient), 也记  $\operatorname{grad}(f)$  为  $\nabla f$ 。

特别地, 对  $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ , 有:

$$(\operatorname{grad}(f_1))(f_2) = g(\operatorname{grad}(f_1), \operatorname{grad}(f_2))$$

下面考虑  $\operatorname{grad}(f)$  的分量表示。设  $\operatorname{grad}(f) = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , 则由:

$$g(X, \operatorname{grad}(f)) = g\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = X^i Y^j g_{ij} \quad (6.2.28)$$

和



$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^j} X^i \delta_i^j = \frac{\partial f}{\partial x^j} X^j \quad (6.2.29)$$

可知

$$Y^j = \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} \quad (6.2.30)$$

从而,

$$\text{grad}(f) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij} f_j \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (6.2.31)$$

式中,  $f_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ 。

**【例 6.2.2】** 在球坐标系中计算函数  $u = u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta$  的梯度。

解: 由

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \cos \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r^2 \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$$

可知

$$\text{grad}(u) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = g^{ij} f_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

由梯度的分量表达式可知, 梯度算子具有以下性质: 对  $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ ,  $\lambda, \mu \in R$ , 有:

$$\text{grad}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \text{grad}(f_1) + \mu \text{grad}(f_2) \quad (6.2.32)$$

$$\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad}(f_2) + f_2 \text{grad}(f_1) \quad (6.2.33)$$

**定理 6.2.5** 对  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,  $X \in X(M)$ , 有:

$$\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + g(\text{grad}(f), X) \quad (6.2.34)$$

**证明:** 设  $\{e_i\}$  为黎曼流形  $(M, g)$  的一个局部单位正交标架场, 则:

$$\text{div}(X) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i) \quad (6.2.35)$$

所以, 有:

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} (fX), e_i) = f \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i) + \sum_{i=1}^m g(e_i(f)X, e_i) \\ &= f \text{div}(X) + \sum_{i=1}^m g(g(\text{grad}(f), e_i)X, e_i) \\ &= f \text{div}(X) + g\left(\sum_{i=1}^m g(\text{grad}(f), e_i)e_i, X\right) \\ &= f \text{div}(X) + g(\text{grad}(f), X) \end{aligned}$$

即式 (6.2.34) 成立。证毕。

### 6.2.3 余微分算子

设  $(M, g)$  是  $m$  维定向黎曼流形, 考虑霍奇星算子和外微分算子作用的合成:

$$A^r(M) \xrightarrow{*} A^{m-r}(M) \xrightarrow{d} A^{m-r+1}(M) \xrightarrow{*} A^{r-1}(M)$$

由此可以引入余微分算子。

定义 6.2.5 (余微分算子) 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向黎曼流形, 对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 定义:

$$\delta\omega = (-1)^{1+m(r+1)} * d * \omega \quad (6.2.36)$$

称映射  $\delta: A^r(M) \rightarrow A^{r-1}(M)$ ,  $\omega \mapsto \delta\omega$  为流形  $M$  上的余微分算子 (codifferential operator)。特别地, 规定  $\delta f = 0$ 。

【例 6.2.3】 设  $dx, dy, dz$  为  $R^3$  的一组单位正交的一次外微分式, 并且与  $R^3$  的定向相符。设  $P, Q, R$  为  $R^3$  上的连续可微函数,  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  为  $R^3$  上的一次外微分式, 求  $\delta\omega$ 。

解: 利用霍奇星算子和外微分算子计算可得:

$$*\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$*\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

所以, 有:

$$\delta\omega = - * d * \omega = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

利用霍奇星算子、外微分算子的性质和余微分算子的定义, 可知如下定理成立。

定理 6.2.6 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向黎曼流形, 对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 有:

$$*\delta d = d\delta*, \quad *\delta\delta = \delta d * \quad (6.2.37)$$

$$d * \delta = \delta * d = 0 \quad (6.2.38)$$

$$*\delta\omega = (-1)^r d * \omega, \quad \delta * \omega = (-1)^{1-r^2} * d\omega \quad (6.2.39)$$

证明: (1) 利用余微分算子的定义和式 (6.2.3) 可知:

$$\begin{aligned} *\delta d\omega &= *(-1)^{1+m(r+1+1)} * d * d\omega = (-1)^{1+m(r+2)} **d * d\omega \\ &= (-1)^{1+m(r+2)} (-1)^{(m-r)r} d * d\omega = (-1)^{1+mr+2m+mr-r^2} d * d\omega \\ &= (-1)^{1-r^2} d * d\omega \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

同时, 有:

$$\begin{aligned} d * \delta\omega &= d(-1)^{1+m(m-r+1)} * d * \omega = (-1)^{1+m(m-r+1)} d * d(-1)^{r(m-r)} \omega \\ &= (-1)^{1+m^2-mr+m+mr-r^2} d * d\omega = (-1)^{1-r^2} d * d\omega \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

利用式 (6.2.40) 和式 (6.2.41), 由  $\omega$  的任意性可知  $*\delta d\omega = d\delta * \omega$ 。类似可证  $*d\delta = \delta d *$ 。

(2) 利用余微分算子的定义和式 (6.2.3) 可知:

$$\begin{aligned} d * \delta\omega &= d * (-1)^a * d * \omega = (-1)^a d * **d * \omega \\ &= (-1)^a d(-1)^b d * \omega = (-1)^{a+b} d^2 * \omega = 0 \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

式中,  $a$  和  $b$  是两个与  $m$  和  $r$  有关的常数, 因为其具体数值不影响式 (6.2.38) 的成立, 故如此表示。

(3) 由式 (6.2.3) 可知:

$$\begin{aligned} *\delta\omega &= *(-1)^{1+m(r+1)} * d * \omega = (-1)^{1+m(r+1)} **d * \omega \\ &= (-1)^{1+m(r+1)} (-1)^{(m-r+1)(r-1)} d * \omega = (-1)^{-r^2} d * \omega \\ &= (-1)^{-r^2} (-1)^{r(r+1)} d * \omega = (-1)^r d * \omega \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

证毕。

**定义 6.2.6** (余闭的、余恰当的) 对  $\omega \in A^r(M)$ ,  $r \geq 1$ , 若  $\delta\omega = 0$ , 则称  $\omega$  是余闭的 (co-closed)。若  $\exists \eta \in A^{r-1}(M)$ , 使得  $\omega = \delta\eta$ , 则称  $\omega$  是余恰当的 (co-exact)。

**定理 6.2.7** 设  $(M, g)$  是  $m$  维定向黎曼流形, 对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 有:

$$\delta^2 = \delta \cdot \delta = 0 \quad (6.2.44)$$

**证明:** 对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} \delta^2 \omega &= \delta \delta \omega = (-1)^a * d * ((-1)^b * d * \omega) \\ &= (-1)^{a+b} * d * d * \omega = (-1)^{a+b} (-1)^c * d^2 * \omega \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

式中,  $a$ 、 $b$  和  $c$  是三个与  $m$  和  $r$  有关的常数, 因其具体数值不影响式 (6.2.44) 的成立, 故如此表示。由庞加莱引理可知:  $d^2(*\omega) = 0$ 。所以, 有  $\delta^2 \omega = 0$ 。即式 (6.2.44) 得证。证毕。

**定理 6.2.7 说明:** 余恰当的外微分式一定是余闭的。

**定义 6.2.7** (共轭算子) 对线性算子  $T: A(M) \rightarrow A(M)$ , 若存在线性算子  $T^*: A(M) \rightarrow A(M)$  使得: 对  $\forall \omega, \eta \in A(M)$ , 有:

$$(T\omega, \eta) = (\omega, T^*\eta) \quad (6.2.46)$$

成立, 则称  $T^*$  是  $T$  的共轭算子 (adjoint operator) 或伴随算子。若:

$$(T\omega, \eta) = (\omega, T\eta)$$

则称  $T$  为自共轭算子 (self-adjoint operator) 或自伴随算子, 简称为自伴算子。

验证可知伴随算子是唯一的。事实上, 设  $T_1^*$  和  $T_2^*$  都是  $T$  的伴随算子, 则  $\forall \omega, \eta \in \Lambda(M)$ ,

$$(\omega, T_1^*\eta) = (T\omega, \eta) = (\omega, T_2^*\eta) \quad (6.2.47)$$

所以, 有  $(\omega, (T_1^* - T_2^*)\eta) = 0$ 。由  $\omega$  和  $\eta$  的任意性可知,  $T_1^* = T_2^*$ 。

**【例 6.2.4】** 求霍奇星算子  $*$  的共轭算子。

**解:** 因为霍奇星算子  $*$ :  $A^r(M) \rightarrow A^{m-r}(M)$  也可理解为同构  $*$ :  $A(M) \rightarrow A(M)$ 。因此, 有映射  $*^{-1}: A(M) \rightarrow A(M)$ 。利用式 (6.2.5), 对  $\omega \in A^r(M)$ ,  $\eta \in A^{m-r}(M)$ , 有:

$$(*\omega, \eta) = (*\omega, (-1)^{r(m-r)} **\eta) = (\omega, (-1)^{r(m-r)} *\eta) \quad (6.2.48)$$

所以,  $(-1)^{r(m-r)} *$  是  $*$  的伴随算子。

**定理 6.2.8** 设  $M$  是定向的闭黎曼流形,  $\omega \in A^r(M)$ ,  $\eta \in A^{r+1}(M)$ , 则:

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta) \quad (6.2.49)$$

即关于外微分形式的整体内积, 算子  $\delta$  与  $d$  互为共轭算子。

**证明:** 根据外微分的定义有:

$$d(\omega \wedge *\eta) = d\omega \wedge *\eta + (-1)^r \omega \wedge (d*\eta) \quad (6.2.50)$$

对该式两边积分, 利用斯托克斯定理和式 (6.2.39), 并注意到流形  $M$  是无边的, 有:

$$\begin{aligned} (d\omega, \eta) &= \int_M d\omega \wedge *\eta = (-1)^{r+1} \int_M \omega \wedge (d*\eta) \\ &= \int_M \omega \wedge *\delta\eta = (\omega, \delta\eta) \end{aligned} \quad (6.2.51)$$

证毕。

对  $\theta \in A^1(M)$ , 利用定理 6.2.7, 有:

$$\int_M (\delta\theta) dV = \int_M \langle 1, \delta\theta \rangle dV = (1, \delta\theta) = (d1, \theta) = 0 \quad (6.2.52)$$

即有如下推论成立。

**推论 6.2.3** 设  $M$  为定向的闭黎曼流形,  $\alpha \in A^1(M)$ , 则:

$$\int_M (\delta\alpha) dV = 0 \quad (6.2.53)$$

下面讨论余微分的分量表示问题。

**定理 6.2.9** 设  $M$  是定向的闭黎曼流形,  $\omega \in A^r(M)$  在局部坐标系下的分量表示为:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

则

$$\begin{aligned} \delta\omega &= - \sum_{i < k} (g^{jk} \omega_{j i_1 \dots i_{r-1}, k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \\ &= - \frac{1}{(r-1)!} (g^{jk} \alpha_{j i_1 \dots i_{r-1}, k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}} \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

**证明:** 令

$$\sigma = - \frac{1}{(r-1)!} g^{jk} \omega_{j i_1 \dots i_{r-1}, k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{r-1}}$$

对  $\forall \eta \in A^{r-1}(M)$ , 计算可知:

$$\langle d\eta, \omega \rangle - \langle \eta, \sigma \rangle = \operatorname{div} \theta \quad (6.2.55)$$

对该式两边取积分, 由斯托克斯定理的推论可知:  $\int_M \operatorname{div} \theta dV = 0$ 。从而, 有:

$$(\beta, \delta\omega) = (d\beta, \omega) = \int_M \langle d\beta, \omega \rangle dV = \int_M \langle \beta, \sigma \rangle dV = (\beta, \sigma) \quad (6.2.56)$$

由  $\beta$  的任意性可知:

$$\delta\omega = \sigma \quad (6.2.57)$$

即式 (6.2.54) 成立。证毕。

特别地, 对一次外微分式  $\theta = \theta_i dx^i$ , 有:

$$\delta\theta = \theta_{i,j} g^{ij} \quad (6.2.58)$$

## 6.3 霍奇-德拉姆算子、拉普拉斯-贝尔特拉米算子及其特征值

霍奇-德拉姆算子 (Hodge-de Rham operator) 和拉普拉斯-贝尔特拉米算子 (Laplace-Beltrami operator) 是黎曼流形上的两类重要的微分算子。拉普拉斯-贝尔特拉米算子作用于流形上的光滑函数。而霍奇-德拉姆算子是拉普拉斯-贝尔特拉米算子的推广, 它作用于流形上的外微分式。与这两类算子有关的一个重要问题是研究它们的特征值, 这是因为它们的谱是重要的解析不变量。流形上微分算子的谱和特征值的研究是流形上大范围分析的热点问题之一。1964 年, 美国数学家米勒 (J. W. Milnor, 1931 年—) 构造出等谱而不同距的 16 维平坦环面。1966 年, 美国数学家 Kac 在《美国数学月刊》(Amer. Math. Monthly) 上发表的文章

中提出了听鼓问题 (Can one hear the shape of a drum?), 该问题形象地揭示了特征值研究的意义。黎曼流形上的微分算子的特征值研究中有一些有趣的问题, 如等谱问题 (isospectral problem)、特征值的上界和下界估计、特征值不等式等。本节首先介绍霍奇-德拉姆算子和拉普拉斯-贝尔特拉米算子的定义和性质, 然后介绍它们特征值的基本性质。

### 6.3.1 霍奇-德拉姆算子和拉普拉斯-贝尔特拉米算子

霍奇-德拉姆算子以苏格兰数学家霍奇和瑞士数学家德拉姆 (G. de Rham, 1903—1990 年) 命名, 也称为霍奇-拉普拉斯算子 (Hodge Laplacian) 或拉普拉斯-德拉姆算子 (Laplace-de Rham operator), 其定义如下。

**定义 6.3.1 (霍奇-德拉姆算子)** 设  $(M, g)$  是  $m$  维黎曼流形, 称映射:

$$\Delta^{(r)} = \delta d + d\delta, \quad : A^r(M) \rightarrow A^r(M), \quad 0 \leq r \leq m$$

为流形  $M$  上的霍奇-德拉姆算子, 也称  $\Delta^{(r)}$  为作用于  $r$  次外微分式的拉普拉斯算子 (Laplace operator on  $r$ -forms)。设  $\omega \in A^r(M)$ , 若  $\Delta^{(r)}\omega = 0$ , 则称  $\omega$  为流形  $M$  上的  $r$  次调和形式 (harmonic form)。用  $H^r(M)$  表示流形  $M$  上的  $r$  次调和形式构成的集合, 即:

$$H^r(M) = \{\omega \in A^r(M) \mid \Delta^{(r)}\omega = 0\}$$

对  $\forall \omega, \eta \in A^r(M)$ , 利用定理 6.2.5, 有:

$$\begin{aligned} (\Delta^{(r)}\omega, \eta) &= (d\delta\omega + \delta d\omega, \eta) = (\delta\omega, \delta\eta) + (d\omega, d\eta) \\ &= (\omega, d\delta\eta) + (\omega, \delta d\eta) = (\omega, \Delta^{(r)}\eta) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

所以霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(r)}$  是作用于  $r$  次外微分式的二阶自伴微分算子。

因为对  $\forall \omega \in A^r(M)$ , 有:

$$\begin{aligned} (d + \delta)^2 \omega &= (d + \delta)(d + \delta)\omega = (d^2 + \delta d + d\delta + \delta^2)\omega \\ &= (\delta d + d\delta)\omega = \Delta^{(r)}\omega \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

所以拉普拉斯-德拉姆算子也可定义为:

$$\Delta^{(r)} = (d + \delta)^2 \quad (6.3.3)$$

利用定理 6.2.5 和整体内积的正定性可得调和形式的充要条件。

**定理 6.3.1** 设  $M$  为  $m$  维的定向闭黎曼流形,  $\omega \in A^r(M)$ , 则:

$$\Delta^{(r)}\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0$$

**证明:** 利用定理 6.2.5, 有:

$$\begin{aligned} (\Delta^{(r)}\omega, \omega) &= (d\delta\omega + \delta d\omega, \omega) = (d\delta\omega, \omega) + (\delta d\omega, \omega) \\ &= (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

根据整体内积的正定性可知  $(\delta\omega, \delta\omega) \geq 0$ ,  $(d\omega, d\omega) \geq 0$ , 由此可知结论成立。证毕。

**【例 6.3.1】** 求证:

$$\Delta^{(r)}d = d\Delta^{(r)} = -d\delta d \quad (6.3.5)$$

$$\Delta^{(r)}\delta = \delta\Delta^{(r)} = -\delta d\delta \quad (6.3.6)$$

$$*\Delta^{(r)} = \Delta^{(r)}* \quad (6.3.7)$$

**证明:** 式 (6.3.5) 和式 (6.3.6) 易证, 读者可自证。下证式 (6.3.7)。

$$\begin{aligned}*\Delta^{(r)} &= *(d\delta + \delta d) = (*d\delta + *\delta d) \\ &= (\delta d * + d\delta *) = \Delta^{(r)} *\end{aligned}\quad (6.3.8)$$

证毕。

注意到  $A^0(M) = C^\infty(M)$ ，所以霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(0)}$  作用于光滑函数  $f$  有：

$$\Delta^{(0)}f = \delta df = (-1)^{1+2m} * d * df = - * d * df \quad (6.3.9)$$

所以，有

$$*\Delta^{(0)}f = - * * d * df = -d * df \quad (6.3.10)$$

在与流形  $M$  定向相符的一个局部坐标系  $(U; x^i)$  中，有：

$$\begin{aligned} *df|_U &= \frac{\sqrt{G}}{(m-1)!} \delta_{i_1 \cdots i_m}^{1 \cdots m} g^{i_1 j} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} \\ &= \sqrt{G} \sum_{i=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

式中， $G = \det(g_{ij})$ 。从而，有：

$$\begin{aligned} d * df|_U &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) dV \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

利用式 (6.3.10)、式 (6.3.12) 和

$$*\Delta^{(0)}f = \Delta^{(0)}f * 1 = \Delta^{(0)}f dV \quad (6.3.13)$$

可得

$$\Delta^{(0)}f = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (6.3.14)$$

利用定理 6.2.2 和式 (6.2.31) 可知：

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (6.3.15)$$

所以

$$\Delta^{(0)}f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = -\operatorname{div}(\nabla f) \quad (6.3.16)$$

据此引入作用在流形上光滑函数的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，它由散度算子  $\operatorname{div}$  和梯度算子  $\operatorname{grad}$  复合而成，其定义如下。

**定义 6.3.2 (拉普拉斯-贝尔特拉米算子)** 设  $M$  是黎曼流形，称：

$$\Delta = -\operatorname{div} \circ \operatorname{grad} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

为流形  $M$  上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，简称为拉普拉斯算子 (Laplace operator, 或 Laplacian)。对  $f \in C^\infty(M)$ ，若  $\Delta f = 0$ ，则称  $f$  为流形  $M$  上的调和函数 (harmonic function)。

它以法国数学家拉普拉斯 (P.-S. Laplace, 1749—1827 年) 和意大利数学家贝尔特拉米 (E. Beltrami, 1835—1900 年) 命名。易知拉普拉斯-贝尔特拉米算子是二阶线性微分算子，有  $\Delta = \Delta^{(0)}$ 。

根据式 (6.3.14), 有:

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \quad (6.3.17)$$

另外, 因为  $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f_i dx^i$ , 所以:

$$\Delta f = \delta df = \delta(f_i dx^i) = -f_{i,j} g^{ij} \quad (6.3.18)$$

**【例 6.3.2】** 设  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  为  $R^3$  的一组单位正交的一次外微分式, 并且与  $R^3$  的定向相符。对  $R^3$  上的 0 次外微分式  $f$ , 有:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

利用例 6.2.3 可得:

$$\Delta f = \delta df = - * d * df = - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

**【例 6.3.3】** 利用式 (6.3.17) 计算证明: 拉普拉斯-贝尔特拉米算子  $\Delta$  在  $R^2$  的直角坐标系  $(x, y)$  下的表达式为:

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.3.19)$$

证明: 在  $R^2$  的直角坐标系  $(x, y)$  下, 有:

$$g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 1, \quad g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 1, \quad g_{12} = g_{21} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$$

从而,  $G = 1$ 。进一步, 有:

$$g^{11} = 1 = g^{22}, \quad g^{12} = 0 = g^{21}$$

利用式 (6.3.17), 对  $\forall f \in C^\infty(R^2)$ , 有:

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{G} g^{11} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{G} g^{12} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{G} g^{21} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{G} g^{22} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

由此可知式 (6.3.19) 成立。证毕。

一般地, 在  $R^m$  的直角坐标系  $(x^1, \dots, x^m)$  下, 有  $G = \det I = 1$ ,  $g^{ij} = \delta^{ij}$ 。因此, 根据式 (6.3.17), 有:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} \quad (6.3.20)$$

**【例 6.3.4】** 求拉普拉斯-贝尔特拉米算子  $\Delta$  在球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  下的表达式。

解: 直角坐标系和球坐标系的关系式为:

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \cos \varphi \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi$$

所以, 有

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (6.3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} - r \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.3.23)$$

这样, 利用式 (6.3.21) ~ 式 (6.3.23), 有:

$$\tilde{g}_{11} = g \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = 1$$

类似计算可得:

$$\tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = 0, \quad \tilde{g}_{13} = \tilde{g}_{31} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\tilde{g}_{23} = \tilde{g}_{32} = 0, \quad \tilde{g}_{33} = r^2$$

所以

$$\tilde{G} = \det(\tilde{g}_{ij}) = r^4 \cos^2 \varphi$$

这样, 利用上述结果计算可得矩阵  $(\tilde{g}_{ij})$  的逆矩阵元素为:

$$\tilde{g}^{11} = 1, \quad \tilde{g}^{22} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}, \quad \tilde{g}^{33} = \frac{1}{r^2} \quad (6.3.24)$$

$$\tilde{g}^{12} = \tilde{g}^{21} = \tilde{g}^{13} = \tilde{g}^{31} = \tilde{g}^{23} = \tilde{g}^{32} = 0 \quad (6.3.25)$$

对  $\forall f \in C^\infty(R^3)$ , 利用式 (6.3.17), 有:

$$\begin{aligned} \Delta f = & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{11} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{12} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \\ & \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{13} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{21} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \\ & \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{22} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{23} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \\ & \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{31} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{32} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) - \\ & \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{33} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

将式 (6.3.24) 和式 (6.3.25) 代入式 (6.3.26) 计算可得:

$$\Delta f = - \left( \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \tan \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right)$$

从而,  $\Delta$  在球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  下的表达式为:

$$\Delta = - \left( \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \tan \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (6.3.27)$$



根据拉普拉斯-贝尔特拉米算子的定义, 对  $\forall f, h \in M$ , 有:

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad}(h)) = -f \Delta h + g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) \quad (6.3.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\ &= -\operatorname{div}(f \operatorname{grad}(h) + h \operatorname{grad} f) \\ &= f \Delta h - 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) + h \Delta f \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

利用式 (6.3.28)、式 (6.3.29)、散度定理和定理 6.2.4, 可得如下定理。

**定理 6.3.2 (格林公式)** 设  $M$  是定向的紧致黎曼流形,  $f, h \in C^\infty(M)$ ,  $h \nabla f$  具有紧致支集, 则:

$$\int_M h \Delta f dV = \int_M g(\nabla f, \nabla h) dV \quad (6.3.30)$$

**推论 6.3.1** 设  $M$  是定向的紧致黎曼流形,  $f, h \in C^\infty(M)$ , 并且  $f$  和  $h$  具有紧致支集, 则:

$$\int_M h \Delta f dV = \int_M f \Delta h dV \quad (6.3.31)$$

## 6.3.2 拉普拉斯算子的特征值

下面先来研究霍奇-德拉姆算子的特征值。

**定义 6.3.3 (霍奇-德拉姆算子的特征值)** 设  $M$  是紧致定向的黎曼流形, 若对  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 存在不恒为 0 的  $r$  次光滑外微分式  $\omega \in A^r(M)$ , 使得:

$$\Delta^{(r)} \omega = \lambda \omega \quad (6.3.32)$$

则称  $\lambda$  是霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(r)}$  的特征值 (eigenvalue), 称  $\omega$  为对应于特征值  $\lambda$  的特征形式 (eigenform)。称  $E_\lambda^r(M) = \{\omega \in A^r(M) \mid \Delta^{(r)} \omega = \lambda \omega\}$  为特征值  $\lambda$  的特征空间 (eigenspace)。特征值的全体 (特征值按其重数重复) 称为  $\Delta^{(r)}$  的谱 (spectrum), 记为  $\operatorname{Spec}^{(r)}(M, g)$ 。

取  $\omega \in A^r(M)$ , 使  $\Delta^{(r)} \omega = \lambda \omega$ , 且  $(\omega, \omega) = 1$ , 则:

$$\lambda = (\lambda \omega, \omega) = (\Delta^{(r)} \omega, \omega) \geq 0 \quad (6.3.33)$$

即  $\Delta^{(r)}$  的特征值非负。

**定理 6.3.3** 霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(r)}$  的对应于不同特征值的特征形式  $\omega$  和  $\eta$  是正交的。

**证明:** 设  $\lambda$  和  $\mu$  是  $\Delta^{(r)}$  的两个不同的特征值, 使得  $\Delta^{(r)} \omega = \lambda \omega$ ,  $\Delta^{(r)} \eta = \mu \eta$ , 其中  $\omega, \eta \in A^r(M)$ , 则:

$$\lambda(\omega, \eta) = (\lambda \omega, \eta) = (\Delta^{(r)} \omega, \eta) = (\omega, \Delta^{(r)} \eta) = (\omega, \mu \eta) = \mu(\omega, \eta) \quad (6.3.34)$$

由此可得

$$(\lambda - \mu)(\omega, \eta) = 0 \quad (6.3.35)$$

因为  $\lambda - \mu \neq 0$ , 故  $(\omega, \eta) = 0$ , 即  $\Delta^{(r)}$  的对应于不同特征值的特征形式  $\omega$  和  $\eta$  是正交的。证毕。

**引理 6.3.1** 若存在正的常数  $c$ , 使得  $A^r(M)$  中的序列  $\{\omega_k\}$  满足: 对所有的  $k$ , 有:

$$\|\omega_k\| \leq c, \quad \|\Delta^{(r)} \omega_k\| \leq c$$

则序列  $\{\omega_k\}$  必有子序列  $\{\omega_{k_i}\}$  是  $A^r(M)$  中的柯西序列。

该引理的证明参见 Warner 的 Foundation of differential manifolds and Lie groups。

**定理 6.3.4** (1) 霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(r)}$  的特征空间  $E_\lambda^r(M)$  是有限维的; (2) 霍奇-德拉姆算子  $\Delta^{(r)}$  的特征值没有有限值的聚点。

**证明:** 采用反证法加以证明。(1) 假设特征值  $\lambda$  的特征空间  $E_\lambda^r(M)$  不是有限维的, 则存在单位正交的  $r$  次外微分式  $\{\omega_k\}$ , 使得  $\Delta^{(r)}\omega_k = \lambda\omega_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ 。因为:

$$\|\omega_k\| = 1 \leq \max\{1, \lambda\}, \quad \|\Delta^{(r)}\omega_m\| = \|\lambda\omega_m\| = \lambda \leq \max\{1, \lambda\}$$

所以根据引理 6.3.1 可知,  $\{\omega_k\}$  有子序列  $\{\omega_{k_i}\}$  是  $A^r(M)$  中的柯西序列。但是, 由于  $\{\omega_k\}$  是规范正交的, 故:

$$(\omega_{k_i} - \omega_{k_{i+1}}, \omega_{k_i} - \omega_{k_{i+1}}) = \|\omega_{k_i}\|^2 + \|\omega_{k_{i+1}}\|^2 = 2$$

由此可知

$$d(\omega_{k_i}, \omega_{k_{i+1}}) = \|\omega_{k_i} - \omega_{k_{i+1}}\| = \sqrt{2} \quad (6.3.36)$$

所以,  $\{\omega_{k_i}\}$  不是柯西序列, 矛盾! 因此,  $E_\lambda^r(M)$  是有限维的。

(2) 假设  $\Delta^{(r)}$  的特征值  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , 其中  $\lambda$  是非负的正数。不妨设  $\lambda_i \neq \lambda_j, 0 \leq \lambda_k \leq \lambda + 1$ 。类似于 (1) 的证明, 在  $A^r(M)$  中取规范正交的  $r$  次外微分式构成的序列  $\{\omega_k\}$ , 使得  $\Delta^{(r)}\omega_k = \lambda_k\omega_k$  且  $\|\omega_k\| = 1$ 。那么, 有:

$$\|\omega_k\| = 1 \leq \lambda + 1, \quad \|\Delta^{(r)}\omega_k\| = \|\lambda_k\omega_k\| = \lambda_k \leq \lambda + 1$$

故使用引理 6.3.1 可知,  $\{\omega_k\}$  存在子序列  $\{\omega_{k_i}\}$ ,  $\{\omega_{k_i}\}$  是  $A^r(M)$  中的柯西序列。但根据式 (6.3.36) 可知  $\{\omega_{k_i}\}$  不是柯西序列, 矛盾! 因此,  $\Delta^{(r)}$  的特征值没有有限值的聚点。证毕。

对拉普拉斯-贝尔特拉米算子  $\Delta$  一般讨论如下三类特征值问题。

(1) 闭特征值问题 (closed eigenvalue problem): 设  $M$  是连通的闭黎曼流形, 寻找实数  $\lambda$ , 使方程  $\Delta\varphi = \lambda\varphi$  有非平凡解  $\varphi \in C^2(M)$ 。

(2) 狄利克雷特征值问题 (Dirichlet eigenvalue problem): 设  $M$  是具有光滑边界、紧致闭包的连通黎曼流形, 寻找实数  $\lambda$ , 使方程:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi|_{\partial M} = 0 \end{cases}$$

有非平凡解  $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{\partial M})$ 。

(3) 纽曼特征值问题 (Neumann eigenvalue problem): 设  $M$  是具有光滑边界、紧致闭包的连通黎曼流形, 寻找实数  $\lambda$ , 使方程:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda\varphi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_{\partial M} = 0 \end{cases}$$

有非平凡解  $\varphi \in C^2(M) \cap C^1(\overline{\partial M})$ , 其中  $\nu$  是  $\partial M$  的单位外法向量场。

**定理 6.3.5 (极小-极大原理)** 设拉普拉斯-贝尔特拉米算子  $\Delta$  的特征值问题有如下离散谱:

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$$

$\{\varphi_j\}$  是特征函数空间的完全规范正交基, 其中  $\varphi_j$  是对应于特征值  $\lambda_j$  的特征函数, 则:

$$\lambda_k = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV} \mid \int_M f \varphi_j dV = 0, j = 0, 1, \dots, k-1 \right\} \quad (6.3.37)$$

特别地, 有

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2 dV}{\int_M f^2 dV} \mid \int_M f dV = \int_M f \cdot 1 dV = \int_M f \varphi_0 dV = 0 \right\}$$

证明: 令  $\alpha_j = (f, \varphi_j)$ , 由

$$\int_M f \varphi_j dV = (f, \varphi_j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

可知

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \quad (6.3.38)$$

于是, 对  $k=0, 1, \dots$  及  $r=k, k+1, \dots$ , 有:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( \nabla \left( f - \sum_{j=k}^r \alpha_j \varphi_j \right), \nabla \left( f - \sum_{l=k}^r \alpha_l \varphi_l \right) \right) \\ &= (\nabla f, \nabla f) - 2 \sum_{j=k}^r \alpha_j (\nabla f, \nabla \varphi_j) + \sum_{j,l=k}^r \alpha_j \alpha_l (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_l) \\ &= \|\nabla f\|^2 - 2 \sum_{j=k}^r \alpha_j (\Delta \varphi_j, f) + \sum_{j,l=k}^r \alpha_j \alpha_l (\Delta \varphi_j, \varphi_l) \\ &= \|\nabla f\|^2 - 2 \sum_{j=k}^r \lambda_j \alpha_j (\varphi_j, f) + \sum_{j,l=k}^r \lambda_j \alpha_j \alpha_l (\varphi_j, \varphi_l) \\ &= \|\nabla f\|^2 - 2 \sum_{j=k}^r \lambda_j \alpha_j^2 + \sum_{j=k}^r \lambda_j \alpha_j^2 \\ &= \|\nabla f\|^2 - \sum_{j=k}^r \lambda_j \alpha_j^2 \end{aligned} \quad (6.3.39)$$

于是,  $\sum_{j=k}^r \lambda_j \alpha_j^2 \leq \|\nabla f\|^2$ ,  $\sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \leq \|\nabla f\|^2 < +\infty$ , 且

$$\begin{aligned} \lambda_k \|f\|^2 &= \lambda_k \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j^2 = \lambda_k \sum_{j=k}^{+\infty} \alpha_j^2 \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \leq \|\nabla f\|^2 \\ \lambda_k &\leq \frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2} \end{aligned}$$

另一方面

$$\int_M |\nabla \varphi_k|^2 = \int_M \varphi_k \Delta \varphi_k = \lambda_k (\varphi_k, \varphi_k) = \lambda_k \int_M \varphi_k^2$$

所以

$$\lambda_k = \frac{\int_M |\nabla \varphi_k|^2}{\int_M \varphi_k^2}$$

因此, 式 (6.3.37) 成立。证毕。

## 附录 6.3 贝尔特拉米生平及学术贡献

贝尔特拉米 (E. Beltrami, 1835—1899 年) (图 6.3.1), 意大利数学家, 在微分几何和数学物理方面做出了杰出贡献。他最先利用伪球面等具体例子证明了非欧几何的存在性。变分



图 6.3.1 贝尔特拉米

学中的贝尔特拉米等式 (Beltrami identity)、偏微分方程中的贝尔特拉米方程 (Beltrami equation)、微分几何中的拉普拉斯-贝尔特拉米算子和贝尔特拉米定理 (Beltrami's theorem) 等都是后人为了纪念他而如此命名的。

1853—1856 年, 贝尔特拉米在帕维亚大学学习数学。1862 年, 他任博洛尼亚大学教授。同年, 发表了他的第一篇文章。之后, 他先后在比萨大学、罗马大学和帕维亚大学等大学获得教授职位。从 1891 年直到去世前, 贝尔特拉米一直住在罗马。

贝尔特拉米在微分几何方面的工作主要体现于他在 1868 年发表的两篇论文。这两篇论文通过构造具体模型说明了鲍耶和罗巴切夫斯基创立的非欧几何的存在性。这两篇论文是:

[1] E. Beltrami. *Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea*. Giornale di Matematiche, 1868, VI: 285–315.

[2] E. Beltrami. *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. Annali. Di Mat., 1868, ser II (2): 232–255.

在《论非欧几何的解释》(英文: *Essay on an interpretation of non-Euclidean geometry*, 意大利语: *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*) 中, 贝尔特拉米认为非欧几何可以在具有常负曲率的曲面——伪球面上实现。按贝尔特拉米的观念, 伪球面上的测地线相当于欧氏几何中的直线, 非欧几何的定理可以在通常的三维欧氏空间中证明。这就是说, 非欧几何命题可以翻译成相应的欧几里得几何命题。如果欧氏几何公理体系没有矛盾, 非欧几何的公理体系也自然没有矛盾。

早在 1840 年, 德国几何学家 F. Minding (1806—1885 年) 就已经开始研究伪球面上的测地三角形 (geodesic triangles), 他指出对应的三角公式可以用双曲函数 (hyperbolic functions) 代替三角函数 (trigonometric functions) 从球面三角几何的对应公式获得。这个工作在 1857 年被意大利数学家科达齐 (D. Codazzi, 1824—1873 年) 所继续发展。但是他们显然都没有想到他们的工作与罗巴切夫斯基的非欧几何理论之间的关联性。而贝尔特拉米则尝试说明二维非欧几何像欧氏空间上的欧氏几何一样正确, 欧几里得的平行公设不能由欧氏几何的其他公理获得。由于伪球面存在奇点, 导致其上的测地线不能无限延伸, 贝尔特拉米的证明是不完整的。数学史专家指出, 贝尔特拉米一定已经意识到这个困难, 所以他在论文中花了一部分内容来处理这个问题。通过合适选择坐标, 贝尔特拉米说明了伪球面上的度量如何可以被转化为单位圆盘、伪球面的奇点对应于非欧平面上的极限圆 (horocycle)。在他论文的引言部分, 贝尔特拉米还指出用这种方式是没办法解释罗巴切夫斯基理论的其余部分的。

在《常曲率空间的基本理论》(英文: *Fundamental theory of spaces of constant curvature*,

意大利语: *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*) 中, 贝尔特拉米给出了任意维数双曲几何和欧氏几何的互相一致性。他引入了几个后来被称为贝尔特拉米-克莱因模型 (Beltrami-Klein model)、庞加莱圆盘模型 (Poincaré disk model)、庞加莱半平面模型 (Poincaré half-plane model) 的非欧几何模型。对半平面模型, 他引用了法国数学家刘维尔 (J. Liouville, 1809—1882 年) 对蒙日微分几何论文的一个注记。贝尔特拉米说明了  $n$  维欧氏几何可以在  $n+1$  维双曲空间中的极限球面 (horosphere) 实现, 因此欧氏几何和非欧几何之间的一致性逻辑关系是对称的。

现在我们已经非常清楚地认识到贝尔特拉米的论文对非欧几何发展的重要性。他的工作使罗巴切夫斯基创立的非欧几何为数学界所接受, 推动了非欧几何的发展。但是, 在他的时代, 贝尔特拉米的论文却没有受到应有的热情回应和公正评价。当时, 意大利著名的几何学家克雷莫纳 (L. Cremona, 1830—1903 年) 担任期刊 *Annali. Di Mat.* 的编辑。他对贝尔特拉米的论文不是建立在循环论证 (circular argument) 的基础之上感到不满意, 担心用欧氏几何来描述非欧几何会引起读者逻辑上的困难。这使得贝尔特拉米将他的论文暂时放在一边。所以, 他的论文被推迟一年发表。这也导致了德国数学家克莱因 (F. Klein, 1849—1925 年) 没有及时获知贝尔特拉米在构造非欧几何的射影圆盘模型方面的领先工作。当然, 这些对贝尔特拉米论文反应产生的部分原因在于他的工作具有很强的新颖性。这一点就像黎曼构建抽象流形、开创黎曼几何一样。值得一提的是, 黎曼在 1854 年所作的奠基性演讲《论作为几何基础的假设》直到他去世的两年后 (1868 年) 才发表。黎曼工作的出版无疑增加了贝尔特拉米对自己工作正确性的信心。而贝尔特拉米的论文则正面回应了黎曼创立的黎曼几何。

贝尔特拉米在推动非欧几何发展方面的另一个重要贡献是引导数学界对一百多年前意大利数学家在非欧几何方面的一个早期工作加以重新认识。意大利数学家沙却利 (G. G. Saccheri, 1667—1733 年) 曾在欧氏几何平行公设研究方面做出重要工作。在他去世前发表的《无懈可击的欧基里德》(*Euclides Vindicatus*) 中, 沙却利尝试用归谬法 (reductio ad absurdum) 来证明欧氏几何的平行公设, 这个工作在非欧几何发展史上具有重要意义。但数学界一直没有注意到这个工作。贝尔特拉米在 1889 年发表的一篇文章中将这个工作重新介绍给数学界。他将沙却利的工作与意大利数学家博雷利 (G. A. Borelli, 1608—1679 年)、英国数学家沃利斯 (J. Wallis, 1616—1703 年)、德国数学家克拉乌 (C. Clavius, 1538—1612 年) 等人的工作, 以及罗巴切夫斯基和鲍耶创立的非欧几何进行了比较。

1872 年后, 贝尔特拉米转向应用数学的研究, 其工作涉及流体动力学、位势理论、波动理论、热力学、光学、弹性理论及电磁学等。他在这些方面的工作收录在 1902—1920 年出版的四卷本《数学著作》(*Opere Matematiche*) 中。他在物理学方面的一些工作与其在非欧几何方面的工作存在密切联系: 他考查了牛顿给出的重力势能在具有负曲率空间中要做何调整。他给出了拉普拉斯算子的一般形式。贝尔特拉米最后的工作是给出麦克斯韦方程 (Maxwell's equations) 的力学解释。

贝尔特拉米曾将高斯在共形表示 (conformal representation) 方面的工作翻译成意大利语。他还通过为里奇和列维-齐维塔提供思想基础的这样一种不直接的方式影响了张量分析理论的发展。

贝尔特拉米在意大利数学、非欧几何发展中发挥了至关重要的作用。1898 年, 他被选为著名的意大利科学院——山猫科学院 (Accademia dei Lincei) 主席。

## 6.4 德拉姆上同调和霍奇分解定理

群的上同调理论是研究群及其表示的重要代数工具，也是研究流形的重要工具。例如，我们可以利用流形积分上同调群的最高维数来判断流形的可定向性：当其为非零整数时，流形是可定向的；当其为零时，流形是不可定向的。我们还可以利用德拉姆上同调（de Rham cohomology）、切赫上同调（Čech cohomology）和层（sheaf）的上同调来研究定义在微分流形上的微分方程的可解性。其中，德拉姆上同调是本节所要介绍的一个源于代数拓扑和微分拓扑的重要工具。利用德拉姆上同调，可以获得流形的贝蒂数、欧拉-庞加莱示性数等流形的拓扑不变量。本节还将介绍霍奇分解定理、庞加莱对偶定理等。

### 6.4.1 德拉姆上同调

上链复形是同调代数中的一个基本概念。而德拉姆复形（de Rham complex）是由光滑流形  $M$  上的外微分式构成的上链复形（cochain complex）：

$$0 \rightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^r(M) \xrightarrow{d} A^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

该复形的上同调就是德拉姆上同调。

**定义 6.4.1**（闭的、恰当的外微分式） 设  $d$  是作用在光滑流形  $M$  上的外微分式的外微分算子： $d: A^r(M) \rightarrow A^{r+1}(M)$ ， $\omega \mapsto d\omega$ ，若  $d\omega = 0$ ，则称  $r$  次外微分式  $\omega$  是闭的（closed）。记：

$$Z^r(M, R) = \ker d = \{\omega \in A^r(M) \mid d\omega = 0\}$$

若对  $\omega \in A^r(M)$ ，存在  $\eta \in A^{r-1}(M)$ ，使得  $\omega = d\eta$ ，则称  $r$  次外微分式  $\omega$  是恰当的（exact）。记：

$$B^r(M, R) = dA^{r-1}(M) = \{\omega \in A^r(M) \mid \exists \eta \in A^{r-1}(M), \text{ s.t. } \omega = d\eta\}$$

下面考虑集合  $B^r(M, R)$  和  $Z^r(M, R)$  的关系。因为对  $\forall \omega \in B^r(M, R)$ ，根据庞加莱引理有：

$$d\omega = d(d\eta) = d^2\eta = 0 \quad (6.4.1)$$

所以， $\omega \in Z^r(M, R)$ 。也就是说，恰当的微分式一定是闭的。注意到  $\omega$  的任意性，可知  $B^r(M, R) \subset Z^r(M, R)$ 。因此可作商群，据此可以建立德拉姆上同调群的概念。

**定义 6.4.2**（德拉姆上同调群） 设  $M$  为光滑流形，称商群：

$$H^r(M, R) = Z^r(M, R) / B^r(M, R)$$

为流形  $M$  的第  $r$  个德拉姆上同调群（de Rham cohomology group）。称  $H^r(M, R)$  中的元素为  $r$  次上同调类，记为  $[\omega] \in H^r(M, R)$ ，其中  $\omega \in A^r(M)$ ，且  $d\omega = 0$ 。

由定义可知， $[\omega_1] = [\omega_2] \in H^r(M, R) \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 + d\sigma$ ，其中  $\sigma \in A^{r-1}(M)$ 。

**【例 6.4.1】** 设  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ，令  $\omega = \frac{x dx}{x^2 + y^2} + \frac{y dy}{x^2 + y^2}$ 。求证： $\omega$  既是闭的，又是恰当的

的外微分式。

**证明：** 因为  $\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) = \omega$ ，即存在  $\eta = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ，使得  $\omega = d\eta$ ，所以  $\omega$  是恰当的一次外微分式。根据庞加莱引理可知， $\omega$  是闭的外微分式。证毕。

**【例 6.4.2】** 设  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , 令  $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} + \frac{-xdy}{x^2+y^2}$ 。求证:  $\omega$  是闭的外微分式,

但不是恰当的外微分式。

**证明:** 因为

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy \wedge dx - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx \wedge dy \\ &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0 \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

所以  $\omega$  是闭的一次外微分式。

但  $\omega$  不是恰当的一次外微分式, 下面用反证法加以证明。假设存在  $f \in A^0(M)$ , 即  $f$  是  $M$  上的光滑函数, 使得  $\omega = df$ , 则对  $M$  中的具有逆时针方向的单位圆  $L$ , 有:

$$\int_L \omega = \int_L df = 0 \quad (6.4.3)$$

另一方面, 可用参数方程  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$  计算该曲线积分:

$$\begin{aligned} \int_L \omega &= \int_L \frac{ydx}{x^2+y^2} + \frac{-xdy}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin \theta d \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{-\cos \theta d \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right) \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

故式 (6.4.3) 与式 (6.4.4) 矛盾。所以, 不存在  $f \in A^0(M)$ , 使得  $\omega = df$ 。所以,  $\omega$  不是恰当的一次外微分式。证毕。

## 6.4.2 霍奇分解定理及其应用

霍奇分解定理 (Hodge decomposition theorem) 是霍奇在 20 世纪 30 年代发展的霍奇理论的主要结论之一。利用霍奇分解定理可以证明霍奇定理和德拉姆定理。

**定理 6.4.1 (霍奇分解定理)** 设  $M$  是  $m$  维的紧致黎曼流形, 记:

$$\Lambda_d = dA^{r-1}(M) = \{\eta \in A^r(M) \mid \exists \omega \in A^{r-1}(M), \text{ s.t. } \eta = d\omega\} \quad (6.4.5)$$

$$\Lambda_\delta = \delta A^{r+1}(M) = \{\eta \in A^r(M) \mid \exists \omega \in A^{r+1}(M), \text{ s.t. } \eta = \delta\omega\} \quad (6.4.6)$$

则对  $0 \leq r \leq m$ ,  $H^r(M)$  是有限维的, 并且  $A^r(M)$  有如下直和分解:

$$\begin{aligned} A^r(M) &= (-\Delta^{(r)})A^r(M) \oplus H^r(M) \\ &= d\delta A^r(M) \oplus \delta dA^r(M) \oplus H^r(M) \\ &= \Lambda_d \oplus \Lambda_\delta \oplus H^r(M) \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

该定理的证明可参考苏竞存的《流形的拓扑学》和 Warner 的 *Foundations of differential manifolds and Lie Groups*。

**定理 6.4.2 (霍奇定理)** 设  $M$  是  $m$  维的定向闭黎曼流形, 对  $\sigma \in A^r(M)$ , 泊松方程  $-\Delta^{(r)}\omega = \sigma$  有解  $\omega \in A^r(M)$  的充要条件是  $\sigma$  与  $H^r(M)$  正交。

**证明:** 先证必要性。若存在  $\omega \in A^r(M)$ , 使得  $-\Delta^{(r)}\omega = \sigma$ , 则对  $\forall \theta \in H^r(M)$ , 有:

$$(\sigma, \theta) = (-\Delta^{(r)}\omega, \theta) = -(\omega, \Delta^{(r)}\theta) = 0 \quad (6.4.8)$$

所以,  $\sigma$  与  $H^r(M)$  正交。

再证充分性。因为  $\sigma$  与  $H^r(M)$  正交, 所以根据霍奇分解定理可知  $\sigma \in \Lambda_d + \Lambda_\delta$ , 即存在  $\xi \in A^{r-1}(M)$ ,  $\eta \in A^{r+1}(M)$ , 使得:

$$\sigma = d\xi + \delta\eta \quad (6.4.9)$$

再利用霍奇分解定理可知, 存在  $\xi_1 \in A^{r-2}(M)$ ,  $\eta_1 \in A^r(M)$ ,  $\gamma_1 \in H^{r-1}(M)$ , 使得:

$$\xi = d\xi_1 + \delta\eta_1 + \gamma_1 \quad (6.4.10)$$

对  $\eta_1 \in A^r(M)$ , 存在  $\xi_2 \in A^{r-1}(M)$ ,  $\eta_2 \in A^{r+1}(M)$ ,  $\gamma_2 \in H^r(M)$ , 使得:

$$\eta_1 = d\xi_2 + \delta\eta_2 + \gamma_2 \quad (6.4.11)$$

因为  $\gamma_1 \in H^{r-1}(M)$ , 所以  $d\gamma_1 = 0$ 。因此, 利用式 (6.4.10) 和式 (6.4.11), 有:

$$\begin{aligned} d\xi &= d^2\xi_1 + d\delta\eta_1 + d\gamma_1 = d\delta\eta_1 = d\delta d\xi_2 + d\delta^2\eta_2 + d\delta\gamma_2 \\ &= d\delta d\xi_2 = (d\delta + \delta d)d\xi_2 = -\Delta^{(r)}d\xi_2 \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

类似可证, 存在  $\eta_3 \in A^{r+1}(M)$ , 使得:

$$\delta\eta = -\Delta^{(r)}\delta\eta_3 \quad (6.4.13)$$

将式 (6.4.12) 和式 (6.4.13) 代入式 (6.4.9), 有:

$$\sigma = -\Delta^{(r)}(d\xi_2 + \delta\eta_3) \quad (6.4.14)$$

即存在  $\omega = d\xi_2 + \delta\eta_3$ , 使得  $-\Delta^{(r)}\omega = \sigma$ 。证毕。

利用霍奇分解定理还可以证明著名的德拉姆定理 (de Rham's theorem)。该定理由德拉姆在 1931 年给出。

**定理 6.4.3 (德拉姆定理)** 设  $(M, g)$  是一个定向的  $m$  维紧致黎曼流形, 则:

$$H^r(M, R) \cong H^r(M) \quad (6.4.15)$$

即  $(M, g)$  上的每个德拉姆上同调类都有唯一的调和表示: 对每个德拉姆上同调类  $[\omega] \in H^r(M, R)$ , 存在唯一的调和形式  $\gamma \in H^r(M)$ , 使得  $[\omega] = [\gamma]$ 。

**证明:** 先证存在性: 考虑德拉姆上同调类  $[\omega] \in H^r(M, R)$ , 由定义可知  $d\omega = 0$ 。对  $\forall \eta \in A^{r+1}(M)$ , 有:

$$(\omega, \delta\eta) = (d\omega, \eta) = (0, \eta) = 0 \quad (6.4.16)$$

即  $\omega \perp \delta A^{r+1}(M)$ 。由霍奇分解定理可知, 存在  $\alpha \in A^{r-1}(M)$ ,  $\gamma \in H^r(M)$ , 使得  $\omega = d\alpha + \gamma$ 。所以,  $\omega$  与  $\gamma$  是德拉姆上同调的, 即  $[\omega] = [\gamma]$ 。

再证唯一性: 若存在  $\gamma_1, \gamma_2 \in H^r(M)$ , 使得  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ , 则存在  $\alpha \in A^{r-1}(M)$ , 使得  $\gamma_1 - \gamma_2 = d\alpha$ 。而由霍奇分解定理可知,  $A^r(M)$  的分解是正交直和分解, 即  $H^r(M) \perp dA^{r-1}(M)$ , 所以:

$$0 = (d\alpha, \gamma_1 - \gamma_2) = (\gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1 - \gamma_2) \quad (6.4.17)$$

据此由整体内积的正定性可知  $\gamma_1 = \gamma_2$ 。

因此, 每个德拉姆上同调类都与唯一的调和形式对应。换句话说, 一个调和形式对应一个德拉姆上同调类, 不同的调和形式不可能对应于同一个德拉姆上同调类。所以, 式 (6.4.15) 成立。证毕。



因为  $H^r(M)$  是有限维的, 所以  $H^r(M, R)$  也是有限维的。

作为代数拓扑和微分拓扑中的一个重要工具, 德拉姆上同调可以帮助我们获得光滑流形所携带的拓扑信息。利用德拉姆上同调群的维数, 可以引入两个重要的拓扑不变量: 贝蒂数 (Betti number) 和欧拉-庞加莱示性数 (Euler-Poincaré characteristic number)。它们的定义如下。

**定义 6.4.3 (贝蒂数、欧拉-庞加莱示性数)** 设  $M$  为  $m$  维紧致黎曼流形, 称:

$$\beta_r(M) = \dim H^r(M, R)$$

为流形  $M$  的第  $r$  个贝蒂数。称  $\chi(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \beta_r(M)$  为流形  $M$  的欧拉-庞加莱示性数, 简称欧拉示性数 (Euler characteristic number)。

“贝蒂数”一词由代数拓扑的奠基人庞加莱首先使用, 以纪念意大利数学家贝蒂 (E. Betti, 1823—1892 年) 在拓扑学方面的工作, 特别是贝蒂在 1871 年发表的重要论文。贝蒂数被广泛应用于单纯同调 (simplicial homology)、生物数学、计算机科学、数字图像等领域。例如, 在现代医学研究领域, 贝蒂数是拓扑数据分析 (Topological data analysis) 的重要工具, 它被用来研究乳腺癌的基因性质。而欧拉-庞加莱示性数则是许多几何研究课题的源泉和出发点, 包括示性类、层的上同调、椭圆拓扑、组合拓扑等。

对二维流形即曲面而言, 球面和实射影平面 (real projective plane) 具有正的欧拉示性数, 平面、圆柱面、环面、莫比乌斯带和克莱因瓶的欧拉示性数为零, 而双曲曲面的欧拉示性数是负的。

由定理 6.4.3 可以获得如下重要推论。

**推论 6.4.1** 设  $M$  为紧致黎曼流形,  $\beta_r(M)$  为  $M$  的第  $r$  个贝蒂数, 则:

$$\beta_r(M) = \dim H^r(M)$$

德拉姆定理和推论 6.4.1 的重要意义在于: 德拉姆上同调群由流形的微分结构所决定, 而贝蒂数则是流形的一个拓扑量。所以, 它们涉及几何、拓扑两个分支, 是沟通这两个不同数学分支的桥梁。

### 6.4.3 庞加莱对偶定理

设  $(M, g)$  为  $m$  维定向的闭黎曼流形,  $[\omega] \in H^r(M, R)$ ,  $[\eta] \in H^{m-r}(M, R)$ , 其中  $\omega \in H^r(M)$ ,  $\eta \in H^{m-r}(M)$ 。上同调类  $[\omega]$  和  $[\eta]$  对应的一般元素可写为  $\omega + d\alpha$  和  $\eta + d\beta$ , 其中  $\alpha \in A^{r-1}(M)$ ,  $\beta \in A^{m-r-1}(M)$ 。因为  $d\omega = 0$ ,  $d^2\alpha = 0$ , 所以:

$$\begin{aligned} d[(\omega + d\alpha) \wedge \beta] &= (d\omega + d^2\alpha) \wedge \beta + (-1)^r (\omega + d\alpha) \wedge d\beta \\ &= (-1)^r (\omega + d\alpha) \wedge d\beta \end{aligned} \quad (6.4.18)$$

同时, 因为  $d\eta = 0$ , 所以有:

$$d(\alpha \wedge \eta) = d\alpha \wedge \eta + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d\eta = d\alpha \wedge \eta \quad (6.4.19)$$

利用式 (6.4.18)、式 (6.4.19) 和斯托克斯定理, 有:

$$\begin{aligned} &\int_M (\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) \\ &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\alpha \wedge \eta + \int_M (\omega + d\alpha) \wedge d\beta \\ &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\alpha \wedge \eta) + (-1)^r \int_M d[(\omega + d\alpha) \wedge \beta] \\ &= \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

即上同调类 $[\omega]$ 中的任意一个一般元素与上同调类 $[\eta]$ 中的任意一个一般元素的外积在流形上的积分都是同一个结果 $\int_M \omega \wedge \eta$ 。换句话说， $\int_M \omega \wedge \eta$  决定了一个不依赖上同调类 $[\omega]$ 和 $[\eta]$ 的代表元选取的数。由此引入庞加莱数积的定义。

**定义 6.4.4 (庞加莱数积)** 设 $(M, g)$ 是一个定向的 $m$ 维闭黎曼流形， $\omega \in H^r(M)$ ， $\theta \in H^{m-r}(M)$ ，令：

$$P([\omega], [\theta]) = P(\omega, \theta) = \int_M \omega \wedge \theta \quad (6.4.21)$$

称映射 $P: H^r(M, R) \times H^{m-r}(M, R) \rightarrow R$ 为庞加莱数积。

易知，庞加莱数积是双线性的。另外，设 $\omega \in H^r(M)$ ，即 $\Delta^{(r)}\omega = 0$ 。因为：

$$\Delta^{(r)}(*\omega) = *(\Delta^{(r)}\omega) = 0$$

所以，有 $*\omega \in H^{m-r}(M)$ 。从而，

$$P([\omega], [*\omega]) = \int_M \omega \wedge *\omega = (\omega, \omega) \geq 0 \quad (6.4.22)$$

其中等号成立当且仅当 $\omega = 0$ 。故有如下定理。

**定理 6.4.4** 设 $(M, g)$ 是一个定向的 $m$ 维闭黎曼流形，则庞加莱数积是非退化的，即对非零的上同调类 $[\omega] \in H^r(M, R)$ ，存在非零的上同调类 $[\theta] \in H^{m-r}(M, R)$ ，使得 $P([\omega], [\theta]) \neq 0$ 。

利用庞加莱数积，可以证明如下著名的庞加莱对偶定理 (Poincaré duality theorem)。

**定理 6.4.5 (庞加莱对偶定理)** 设 $(M, g)$ 为定向的 $m$ 维闭黎曼流形，有：

$$H^r(M, R) \cong H^{m-r}(M, R), \quad 0 \leq r \leq m \quad (6.4.23)$$

**证明：**首先定义从 $H^r(M, R)$ 到 $H^{m-r}(M, R)$ 的对偶空间 $(H^{m-r}(M, R))^*$ 的线性映射：

$$L: H^r(M, R) \rightarrow (H^{m-r}(M, R))^*, \quad \omega \rightarrow L\omega$$

因为 $L\omega \in (H^{m-r}(M, R))^*$ ，所以对 $\forall \theta \in H^{m-r}(M, R)$ ，可用：

$$\int_M L\omega(\theta) dV = P(\omega, \theta)$$

定义线性映射 $L$ 。因为庞加莱数积是非退化的，所以映射 $L: H^r(M, R) \rightarrow (H^{m-r}(M, R))^*$ 是一个同构。这样就有：

$$H^r(M, R) \cong (H^{m-r}(M, R))^* \cong H^{m-r}(M, R) \quad (6.4.24)$$

证毕。

1893年，庞加莱利用贝蒂数给出了庞加莱对偶定理的原始形式：定向的 $m$ 维闭黎曼流形的第 $r$ 个贝蒂数和第 $m-r$ 个贝蒂数相等。庞加莱在1895年的论文《拓扑》(Analysis Situs)中使用他发明的拓扑相交理论 (topological intersection theory) 来证明这个结论。在此之后，来自其他拓扑学家的批评让他意识到这个证明中存在缺陷。在《拓扑》的后续头两篇补充文 (发表于1899年和1900年) 中，庞加莱利用对偶三角剖分 (dual triangulations) 给出了该定理的新证明。到20世纪30年代，上同调被发明，捷克数学家切赫 (E. Čech, 1893—1960年) 和惠特尼的工作导致了庞加莱对偶定理现代形式的形成。

利用庞加莱对偶定理，可以获得相关的一些推论。当定理6.4.5中的 $r$ 取 $m$ 时，有：

$$H^m(M, R) \cong H^0(M, R) \cong H^0(M) \quad (6.4.25)$$

其中  $H^0(M) = \{f \in A^0(M) | \Delta f = 0\}$ 。再根据定理 6.3.1 可知,  $df = 0$ 。这样, 就获得了如下推论。

**推论 6.4.2** 设  $(M, g)$  为定向的  $m$  维闭黎曼流形, 有:

$$H^m(M, R) \cong R$$

根据贝蒂数的定义可得如下推论。

**推论 6.4.3** 设  $(M, g)$  为定向的  $m$  维闭黎曼流形, 有:

$$\beta_r(M) = \beta_{m-r}(M)$$

这就是庞加莱对偶定理的原始形式。

注意到奇数维的黎曼流形有偶数个贝蒂数, 并利用推论 6.4.3, 可得如下推论。

**推论 6.4.4** 设  $(M, g)$  为定向的  $m$  维闭黎曼流形, 若  $m$  是奇数, 则流形  $N$  的欧拉示性数为零。

**证明:** 若  $m$  是奇数, 则在贝蒂数定义的和式  $\chi(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \beta_r(M)$  中有偶数项。因为:

$$\begin{aligned} (-1)^{m-r} \beta_{m-r}(M) &= (-1)^{2r} (-1)^{m-r} \beta_r(M) = (-1)^m (-1)^r \beta_r(M) \\ &= (-1)^{r+1} \beta_r(M) \end{aligned} \quad (6.4.26)$$

所以  $(-1)^{m-r} \beta_{m-r}(M)$  与  $(-1)^r \beta_r(M)$  可相互抵消。这样, 欧拉示性数定义中的和式各项可两两相消。从而, 欧拉示性数的值为零。证毕。

## 附录 6.4 德拉姆生平及学术贡献

德拉姆 (G. de Rham, 1903—1990 年) (图 6.4.1), 瑞士数学家, 因其在微分拓扑方面的工作而享誉数学界。

1921 年, 他在洛桑大学学习生物学、化学和物理学, 后转学数学。1926—1931 年, 他一直在巴黎学习并攻读博士学位。在巴黎期间, 他先后参加了嘉当、勒贝格 (H. L. Lebesgue, 1875—1941 年)、阿达马 (J. S. Hadamard, 1865—1963 年)、茹利亚 (G. Julia, 1893—1978 年)、皮卡 (C. E. Picard, 1856—1941 年) 等法国杰出数学家开设的课程。特别是, 勒贝格在德拉姆攻读博士学位过程中给了他持续不断的鼓励、建议和支持。在巴黎期间, 德拉姆阅读了所有他能找到的拓扑书籍, 这可能也是他后来取得成功的原因之一。这期间, 他研读了美国拓扑学家亚历山大 (J. W. Alexander II) (1888—1971 年) 的文章《关于两个具有相同群的三维流形的注记》(Note on two three-dimensional manifolds with the same group)。1928 年, 他的第一篇文章《对偶拓扑》(Sur la dualité en Analysis situs) 出现在期刊 *Comptes Rendus* 上。在此之后, 德拉姆激动地发现嘉当



图 6.4.1 德拉姆

发表于 1928 年的关于李群拓扑、贝蒂数的论文 *Sur les nombres de Betti des espaces de groupes*

clos 可以解决他一直思考的许多问题。之后，他与勒贝格保持联系，在期刊 *Comptes Rendus* 上发表了进一步的注记文章。1930 年，德拉姆完成了他的博士论文，并寄了一份给勒贝格以感谢他一直以来的照顾。而勒贝格又帮助德拉姆将论文发表在刘维尔主办的《纯粹与应用数学杂志》(*Journal de mathématiques pures et appliquées*) 上。

1930—1931 年，德拉姆一直呆在哥廷根大学。在那里，他遇到了许多世界著名的数学家：前苏联数学家亚历山德罗夫 (P. S. Aleksandrov, 1896—1982 年)、德国裔美国数学家柯朗 (R. Courant, 1888—1972 年)、法国数学家埃雷斯曼 (C. Ehresmann, 1905—1979 年)、前苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (A. N. Kolmogorov, 1903—1987 年)、德国数论学家郎道 (E. G. H. Landau, 1877—1938 年)、德国数学家外尔 (H. K. H. Weyl, 1885—1955 年) 和德国女数学家诺特 (E. Noether, 1882—1935 年) 等。

1931 年 6 月，他完成了他的博士论文答辩，取得了巴黎大学的博士学位。答辩委员会的主席是嘉当，成员包括茹利亚、蒙泰尔 (P. A. A. Montel, 1876—1975 年)。他的博士论文 (如图 6.4.2 所示) 共 87 页，分为四部分：第一部分回顾了有限复形 (finite complexes) 及其同调的进展；第二部分讨论复形中链 (chain) 的相交理论；第三部分讨论链上的多重积分；第四部分给出了几个具有相同贝蒂数、相同挠率但不等价的复形例子。德拉姆的博士论文如图 6.4.2 所示。

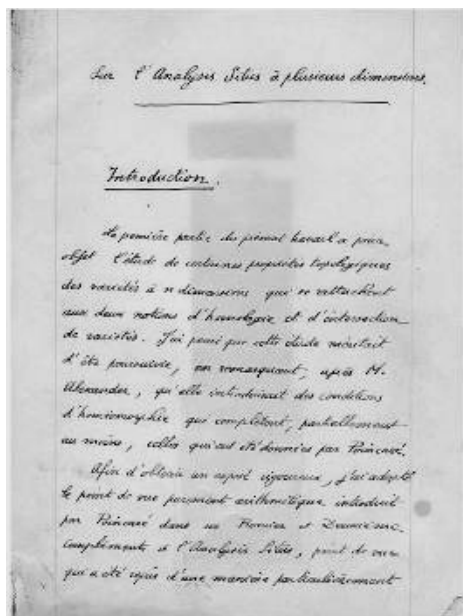


图 6.4.2 德拉姆的博士论文

德拉姆是第一个研究不同类型上同调的数学家。他证明了著名的德拉姆定理，说明德拉姆上同调群是拓扑不变量。据信，庞加莱曾猜想过德拉姆定理的结论是正确的，而嘉当在 1928 年也曾明确地表达过这个猜想。德拉姆在 1931 年给出了这个定理的严格证明。我们可以利用德拉姆上同调、切赫上同调和层的上同调来研究定义在微分流形上的微分方程的可解性。德拉姆发现这些方法是相关的：对定向的闭流形而言，通过单纯复形获得的贝蒂数与通过德拉姆上同调获得的贝蒂数是一样的。这个工作在 20 世纪 50 年代被波兰犹太裔美国数学家艾伦伯格 (S. Eilenberg, 1913—1998 年) 和斯廷罗德 (N. E. Steenrod, 1910—1971 年) 所推广，

这两位数学家一起完成了同调论的公理化工作。在霍奇理论和层论 (sheaf theory) 发展过程中, 德拉姆定理产生的影响是巨大的。

在瑞士苏黎世召开的 1932 年国际数学家大会上, 德拉姆基于他的博士论文中的工作作了一个报告。后来, 嘉当在一次关于对称黎曼空间的国际会议上介绍了德拉姆的工作, 这使得德拉姆在国际数学界进一步赢得了声誉。

1932 年, 他获得洛桑大学的讲师职位。1935 年, 他参加了由亚历山德罗夫组织的在前苏联莫斯科举办的第一届国际拓扑学会议。许多杰出的拓扑学家都参加了这次会议, 包括德国数学家霍普夫 (H. Hopf, 1894—1971 年)、美国数学家惠特尼 (H. Whitney) (1907—1989 年)、犹太裔法国数学家韦伊 (A. Weil, 1906—1998 年) 等。1936 年, 他担任洛桑联邦理工学院和日内瓦大学的副教授。1943 年, 成为洛桑大学的全职教授。1953 年, 担任日内瓦大学的正教授。1971 年、1973 年他先后从洛桑大学和日内瓦大学退休。在他一生中, 他担任过几个著名高等教育研究机构的访问客座教授: 1949—1950 年, 哈佛大学; 1950 年和 1957—1958 年, 普林斯顿高等研究所; 1966 年, 印度的塔塔基础研究院 (Tata Institute of Fundamental Research)。

1940—1942 年、1942—1944 年、1944—1945 年, 德拉姆分别担任瑞士数学会的秘书长、副主席、主席。1963—1966 年, 他担任了国际数学联盟 (International Mathematical Union) 主席。他还担任了 1966 年在莫斯科召开的国际数学家大会主席。他是法国法兰西学院、德国哥廷根科学院和意大利山猫科学院的院士。

德拉姆在挠不变量 (torsion invariant) 这一光滑流形拓扑不变量研究方面也做出了重要贡献。德拉姆撰写过多本经典的书籍和教材: 1950 年, 与日本数学家小平邦彦 (K. Kodaira, 1915—1997 年) 合作出版《调和积分》(Harmonic Integrals); 1969 年, 《代数拓扑导论讲义》(Lectures on introduction to algebraic topology) 等。

他曾告诫他的学生: 课程、书本只是激发学习和研究建议的载体和灵感的来源。数学家应该用自己的方法加以判断; 数学家的学习和研究态度应该是批评的、挑剔的; 数学家不应该先入为主地承认任何他自己还没有完全搞清楚的事是对的。

## 习 题 6

1. 证明定理 6.1.2。

2. 设在  $R^2 \setminus \{0\}$  上:

$$\omega = \frac{x}{r^3} dy \wedge dz + \frac{y}{r^3} dz \wedge dx + \frac{z}{r^3} dx \wedge dy$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。对  $c > 0$ , 证明:

$$\int_{S^2(c)} \omega = 4\pi$$

3. 设  $\omega = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 求  $\int_M d\omega$ , 其中  $M: x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ , 并按逆时针方向定向。

4. 设  $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ , 求  $\int_M d\omega$ , 其中  $M: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , 并按外法向量定向。

5. 在球坐标系中求函数  $u(r, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{r^2} + e^r \cos \varphi - 2r^3 \cos \theta$  的梯度。

6. 在平面极坐标系中计算向量场的散度。

7. 在  $R^3$  的球坐标系、柱坐标系中计算向量场的散度。  
 8. 设  $\omega$  和  $\eta$  都是闭的外微分式, 证明:  $\omega \wedge \eta$  也是闭的外微分式。  
 9. 设  $s$  是正整数,

$$\omega = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^r$$

是  $R^r \setminus \{0\}$  上的  $s$  次外微分式, 其中  $f_i = \frac{x^i}{\left(\sum_{j=1}^r (x^j)^2\right)^{\frac{s}{2}}}$ 。(1) 求  $d\omega$ ; (2) 确定  $s$  的值, 使得  $\omega$  为闭的外

微分式; (3) 证明: 若  $\omega$  是闭的外微分式, 则  $\omega$  不是恰当的外微分式。

10. 在  $R^n \setminus \{0\}$  中令:

$$\omega = \frac{x^1 dx^1 + \cdots + x^n dx^n}{\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^{\frac{n}{2}}}$$

(1) 求  $*\omega$ ; (2) 证明  $*\omega$  是闭的外微分式。

11. 设

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) 计算  $d\omega$ ; (2) 证明: 在半空间  $\{(x, y, z) \in R^3 \mid z > 0\}$  中存在一次外微分式  $\theta$ , 使得  $\omega = d\theta$ ;

(3) 证明: 在  $R^3 \setminus \{0\}$  中不存在一次外微分式  $\theta$ , 使得  $\omega = d\theta$ 。

12. 设  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , 映射  $f: D \rightarrow R^3$  为:

$$f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1),$$

而

$$\omega = ydy \wedge dz + xzdx \wedge dz$$

是  $R^3$  上的二次外微分式, 求  $\int_D f^* \omega$ 。

# 名词索引

## A

阿贝尔 (Abel) 积分 附录 3.2

阿贝尔函数 附录 3.2

阿蒂亚-辛格 (Atiyah-Singer) 指标定理

附录 4.3

爱因斯坦 (Einstein) 求和约定 1.1

爱因斯坦场方程 附录 2.4, 5.5

爱因斯坦-嘉当 (Einstein-Cartan) 理论

附录 2.4

爱因斯坦流形 5.5

爱尔兰根 (Erlanger) 纲领 附录 2.4

埃尔米特 (Hermite) 流形 附录 4.3

## B

伴随算子 6.2

贝蒂 (Betti) 数 6.4

贝尔特拉米-克莱因 (Beltrami-Klein)

模型 附录 6.3

闭包 3.1

闭的外微分式 5.3, 6.4

闭集 3.1

闭流形 3.5

闭特征值问题 6.3

闭映射 3.1

闭子流形 3.5

边界 3.1

表示论 附录 2.4

标准基底 5.2

泊松 (Poisson) 方程 6.4

泊松括号积 4.1

博弈论 附录 3.5

部分反对称化算子 2.3

不可定向 1.4, 6.4

不动点定理 附录 3.5

## C

测地三角形 附录 6.3

测地线 5.5, 附录 6.3

层 6.4

常曲率空间 附录 6.3

常曲率黎曼流形 5.5

超几何级数 附录 3.2

超弦 5.5

陈-高斯-博内 (Chern-Gauss-Bonnet)

定理 附录 4.3

Clifton-Pohl 环面 5.2

从切平面 1.3

丛投影 4.3

丛坐标卡 4.3

## D

大范围微分几何 附录 4.3

代数几何 附录 3.2

代数拓扑 附录 2.4

代数群 附录 2.4

带边流形 3.5

单参数变换群 4.2

单纯同调 6.4

单复变函数 附录 3.2

单位分解定理 5.2

单位正交基底 1.1

单值化定理 5.5

导集 3.1

道路连通 3.1

道路连通分支 3.1

德拉姆 (de Rham) 定理 6.4

德拉姆复形 6.4

德拉姆上同调 6.4

德拉姆上同调群 5.3

等距变换 1.1, 1.4  
 等谱问题 6.3  
 第一比安基 (Bianchi) 恒等式 5.5  
 底空间 4.3  
 底流形 4.3  
 笛卡儿叶形线 附录 1.2  
 电磁场张量 2.3  
 点集拓扑 3.1  
 狄拉克 (Dirac) 方程 附录 5.4  
 狄利克雷 (Dirichlet) 特征值问题 6.3  
 定向 6.1  
 定向相符 6.1  
 定向一致 6.1  
 度量空间 1.1, 3.1  
 度量张量 2.2  
 度量指标 5.2  
 对称的 5.4  
 对合分布 4.1  
 对偶向量 2.1  
 对偶空间 2.1  
 对偶基 2.1  
 对偶三角剖分 6.4  
 对称张量 2.3  
 对称化算子 2.3  
 第一类基本量 1.4  
 第一基本形式 1.4  
 第二基本形式 1.4  
 第二类基本量 1.4  
 多重线性函数 2.1

## E

二元向量函数的偏导数 1.2  
 二元向量函数可微 1.2  
 Enneper 曲面 1.4

## F

法截线 1.4  
 法平面 1.3  
 法曲率 1.4  
 仿射空间 1.1

仿射联络 5.4  
 仿射联络空间 5.4  
 仿射联络系数 5.4  
 反变 2.1  
 反对称张量 2.3  
 反对称化算子 2.3  
 非退化的切映射 3.5  
 非欧几何 附录 1.4, 附录 6.3  
 芬斯勒 (Finsler) 流形 5.2  
 弗雷内 (Frenet) 标架 1.3  
 弗雷内公式 1.3  
 弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 定理 4.1  
 弗罗贝尼乌斯条件 4.1  
 富比尼-施图迪度量 5.5  
 复变函数论 附录 2.4  
 复单李代数 附录 2.4  
 复解析簇 附录 3.3  
 复李代数 4.1  
 复平面 5.5  
 复射影空间 5.5  
 覆盖 3.1  
 负惯性指标 5.2  
 傅里叶级数 附录 3.2

## G

高斯 (Gauss) 公式 6.1  
 高斯-奥斯特罗格拉德斯基 (Gauss-Ostrogradski) 公式 6.1  
 高斯-博内 (Gauss-Bonnet) 公式 附录 4.3

高斯曲率 1.4  
 高斯绝妙定理 1.4  
 格林 (Green) 公式 6.1, 6.3  
 格林-黎曼 (Green-Riemann) 公式 6.1  
 共变 2.1  
 共变导数 5.4  
 共轭算子 6.2  
 共轭张量 2.2  
 共形表示 附录 6.3  
 孤立点 3.1



广义高斯-博内 (Gauss-Bonnet) 定理

附录 4.3

广义克罗内克符号 2.3

广义相对论 附录 2.4, 附录 5.2, 附录 5.4

光电效应 附录 5.2

光滑分布 4.1

光滑函数 3.3

光滑函数的微分 3.4

光滑函数芽 3.4

光滑流形 3.2, 附录 3.3

光滑切向量场 4.1

光滑曲线 3.3

光滑映射 3.3

光滑映射的秩 3.5

光滑张量场 5.1

光锥 5.2

轨线 4.2

规范场 附录 5.2

过渡函数 4.3

## H

豪斯多夫 (Hausdorff) 空间 3.1

惠特尼 (Whitney) 嵌入定理 3.5

混合积 1.2

黑塞 (Hesse) 矩阵 1.4

环面 3.2

活动标架 附录 2.4, 5.5

霍普夫-林诺 (Hopf-Rinow) 定理 5.1

霍奇-德拉姆 (Hodge-de Rham) 算子 6.3

霍奇 (Hodge) 对偶 6.2

霍奇分解定理 6.4

霍奇星算子 6.2

## I

离散度量 1.1

离散空间 3.1

连续映射 1.1

邻域 1.1

## J

几何积分论 附录 3.3

基本向量 1.3

基本三棱形 1.3

基底向量 1.2

积分流形 4.1

积流形 3.2

极限球面 附录 6.3

极限圆 附录 6.3

集合论 附录 3.5

嘉当 (Cartan) 结构方程 5.5

嘉当引理 2.4

加细覆盖 5.2

简单曲面 1.4, 3.2

简单曲线 3.2

解析数论 附录 3.2

结构方程 5.5

结构群 4.3

截曲率 5.5

紧致空间 3.1

浸入 附录 3.3, 3.5

距离 1.1

距离函数 1.1

极小曲面 1.4

奇点 附录 3.3

奇置换 2.3

聚点 3.1, 6.3

局部连通 3.1

局部内积 6.1

局部平凡化条件 4.3

局部有限的子集簇 5.2

绝对微分学 附录 5.2, 附录 5.4

## K

卡拉比-丘流形 5.5

开尔文-斯托克斯 (Kelvin-Stokes) 公式 6.1

开单位圆盘 5.5

开集 1.1, 3.1

开集公理 3.1

开球面 3.2  
 开映射 3.1  
 开圆 3.2  
 开柱面 3.2  
 开子流形 3.5  
 凯勒流形 5.5  
 克莱因 (Klein) 瓶 1.4  
 克里斯托弗 (Christoffel) 符号 5.4  
 克罗内克 (Kronecker) 符号 1.1  
 可定向曲面 1.4  
 可定向流形 6.1  
 可度量化拓拓扑空间 3.1  
 柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 方程 6.1  
 柯西 (Cauchy) 积分定理 6.1  
 柯西序列 6.3  
 科斯居尔 (Koszul) 公式 5.4  
 空间形式 5.5

## L

拉回丛 4.3  
 拉回映射 3.4  
 拉普拉斯 (Laplace) 算子 6.3  
 拉普拉斯-贝尔特拉米 (Laplace-Beltrami) 算子 6.3  
 类时切向量 5.2  
 类空切向量 5.2  
 类光切向量 5.2  
 里奇流 5.5  
 里奇平坦流形 5.5  
 里奇曲率 5.5  
 里奇曲率张量 5.5  
 李代数 4.1  
 李导数 4.2  
 李括号 4.1  
 李普希茨 (Lipschitz) 条件 附录 3.3  
 李群 附录 2.4  
 离散拓扑空间 3.1  
 黎曼 (Riemann) 度量 5.2  
 黎曼-克里斯托弗 (Riemann-Christoffel) 张量 5.5

黎曼几何 附录 5.2, 附录 5.4  
 黎曼几何基本定理 5.4  
 黎曼联络 5.4  
 黎曼流形 5.2, 附录 5.4  
 黎曼球面 5.5  
 黎曼曲率张量 5.5  
 连通空间 3.1  
 连通分支 3.1  
 连续映射 3.1  
 链 附录 6.4  
 列维-齐维塔 (Levi-Civita) 联络  
 零矢量 5.2  
 流形 3.2  
 流形的边界 3.5  
 螺线 1.5  
 洛伦兹 (Lorentz) 流形 5.2

## M

麦克斯韦 (Maxwell) 方程 附录 6.3  
 毛瑞尔-嘉当微分方程 附录 2.4  
 MATLAB 1.5  
 meshgrid 命令 1.5  
 迷向点 5.5  
 迷向流形 5.5  
 幂集 3.1  
 闵可夫斯基 (Minkowski) 空间  
 模 1.1, 5.2, 6.1  
 密切平面 1.3  
 莫比乌斯 (Möbius) 带 1.4, 1.5

## N

纳什 (Nash) 均衡 附录 3.5  
 纳什嵌入定理 3.5  
 挠率形式 5.4  
 挠率张量 5.4  
 内部 3.1  
 内蕴几何 1.4, 附录 4.3  
 逆变 2.1  
 拟阵 附录 3.3

牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式 6.1

纽曼 (Neumann) 特征值问题 6.3

## O

欧拉-庞加莱 (Euler-Poincaré) 示性数 6.4

欧拉公式 1.4

欧氏向量空间 1.1

欧氏内积 1.1

欧氏空间 1.1

偶置换 2.3

## P

排列 2.3

庞加莱 (Poincaré) 半平面模型 附录 6.3

庞加莱猜想 5.5

庞加莱对偶定理 6.4

庞加莱数积 6.4

庞加莱引理 5.3

庞加莱圆盘模型 附录 6.3

抛物点 1.4

抛物空间形式 5.5

平均曲率 1.4

平行公设 附录 1.4, 附录 6.3

平行切向量场 5.5

平行位移 附录 5.4

平庸拓扑空间 3.1

plot 函数 1.5

plot3 命令 1.5

谱 6.3

普法夫 (Pfaff) 方程组

普拉托 (Plateau) 问题 1.4

## Q

7 维怪球 3.3

恰当的外微分式 5.3, 6.4

千禧年数学问题 附录 3.2

嵌入 附录 3.3, 3.5

纤维 4.3

纤维丛 附录 3.3, 附录 5.2

切丛 4.3

切赫 (Čech) 上同调 6.4

切空间 3.4

切向量 3.4

切向量场 4.1

球极投影 3.1, 3.2

球面 1.4, 1.5, 3.2, 3.5

球面三角几何 附录 6.3

曲率算子 5.5

曲率形式 5.5

曲率张量 5.5

曲面的定向 1.4

曲面的法向量 1.4

曲面的几何分类 5.5

曲面的切平面 1.4

曲面上曲线的弧长 1.4

曲面上两条曲线间的夹角 1.4

曲面域的面积 1.4

曲线的切线 1.3

曲线的曲率 1.3, 1.5

曲线的挠率 1.3, 1.5

曲线论基本定理 1.3

曲纹坐标网 1.4

全空间 4.3

## S

三角函数 附录 6.3

三角级数 附录 3.2

散度 6.2

散度定理 6.2

散度算子 6.2

瑟斯顿几何化猜想 5.5

商拓扑 3.1

商空间 3.1

商群 6.4

上边缘算子 5.3

上链复形 6.4

上同调 附录 3.3, 6.4

实李代数 4.1

示性类 附录 3.3, 附录 4.3  
施蒂费尔-惠特尼 (Stiefel-Whitney) 示性类 附录 3.3

施密特 (Schmidt) 正交化 1.1

时间线 3.3

斯托克斯定理 6.1

射影圆盘模型 附录 6.3

数量积 1.2

数量曲率 5.5

数论 附录 3.2

双曲半平面 5.4

双曲点 1.4

双曲函数 附录 6.3

双曲几何 附录 1.4, 附录 6.3

双曲空间 5.5

双曲空间形式 5.5

四色问题 附录 3.3

舒尔定理 习题五

缩并 2.2

## T

特征空间 6.3

特征形式 6.3

特征值 6.3

体积元 6.1

梯度 6.2

梯度算子 6.2

调和函数 6.3

调和积分 附录 6.4

调和形式 6.3

听鼓问题 6.3

同调代数 附录 2.4

同胚 3.1, 3.2

图的着色 附录 3.3

椭圆点 1.4

椭圆空间形式 5.5

拓扑 3.1

拓扑不变性 3.1

拓扑空间 3.1

拓扑流形 3.2

拓扑数据分析 6.4

拓扑相交理论 6.4

## W

外代数 2.4

外积 2.4

外围流形 3.5

外微分 5.3

外微分的求值公式 5.3

外微分式 5.3

外微分式在流形上的积分 6.1

外形式 2.4

外形式空间 2.4

外形式整除 2.4

完全可积的分布 4.1

万有引力常数 5.5

伪黎曼流形 5.2

伪球面 1.5, 附录 6.3

微分结构 3.2, 3.3

微分流形 3.2

微分同胚 3.3

微分拓扑 3.1

微分映射的奇点 附录 3.3

无穷小变换 4.1

无穷小群 4.1

无挠的 5.4

## X

希尔伯特 (Hilbert) 空间 1.1

协变 2.1

协变导数 5.4

协变微分 5.4

协变微分算子 5.4

协变张量 2.3

狭义相对论 5.2, 附录 5.2, 附录 5.4

向量丛 4.3

向量丛的笛卡儿积 4.3

向量丛的截面 4.3

向量丛的坐标变换 4.3

向量函数 1.2

向量积 1.2  
向量空间 1.1  
悬链面 1.4  
旋转曲面 1.4  
循环论证 附录 6.3

## Y

雅克比 (Jacobi) 行列式 1.4  
雅克比恒等式 4.1, 6.1  
淹没 3.5  
沿轨线的诱导切向量场 4.2  
杨-米尔斯 (Yang-Mills) 规范场论 3.3  
一般线性群 4.3  
一次外微分式 5.1  
一元向量函数的极限 1.2  
一元向量函数的连续性 1.2  
一元向量函数的微商 1.2  
一元向量函数的积分 1.2  
应力-能量张量 5.5  
有限复形 附录 6.4  
诱导定向 6.1, 6.2  
诱导切映射 3.4  
诱导余切映射 3.4  
余闭的 6.2  
余切丛 4.3  
余切向量 3.4  
余切空间 3.4  
余恰当的 6.2  
余微分算子 6.2  
宇宙常数 5.5  
圆柱螺线 1.3, 1.5, 3.2  
圆柱面 1.4

## Z

直积 1.1  
自然标架 3.4  
自旋角动量 附录 2.4  
张量 2.1  
张量场 5.1  
张量场的李导数 5.1  
张量分析 附录 5.2, 附录 5.4  
张量积 2.2  
张量积空间 5.1  
张量空间 5.1  
真空时空度量 附录 2.4  
整体内积 6.1  
正交 6.1, 6.3  
正螺面 1.5  
正惯性指标 5.2  
正则曲线 1.3  
正则曲面 1.4  
指标的提升和下降 2.2  
支撑集 5.2, 6.1  
置换 2.3  
自共轭算子 6.2  
自伴算子 6.2  
主法向量 1.3  
主曲率 1.4  
主标架丛 附录 2.4  
转移函数 4.3  
转移函数族 4.3  
转移映射 4.3  
子丛 4.3  
子流形 3.5  
最小二乘法 附录 3.2  
坐标卡 3.2

# 人名索引

## A

阿波罗尼乌斯 (Apollonius, 约公元前 262—190 年) 1.3, 1.4

阿达马 (J. S. Hadamard, 1865—1963 年) 3.2, 附录 6.4

阿基米德 (Archimedes, 公元前 287—212 年) 附录 1.3

爱森斯坦 (F. G. M. Eisenstein, 1823—1852 年) 附录 3.2

爱因斯坦 (A. Einstein, 1879—1955 年) 1.1, 2, 附录 2.4, 3.2, 5, 附录 5.2, 附录 5.4, 5.5

艾伦伯格 (S. Eilenberg, 1913—1998 年) 6, 附录 6.4

埃雷斯曼 (C. Ehresmann, 1905—1979 年) 4, 附录 6.4

埃舍尔 (M. C. Escher, 1898—1972 年) 1.4

## B

鲍耶 (J. Bolyai, 1802—1860 年) 附录 1.4, 附录 6.3

贝尔特拉米 (E. Beltrami, 1835—1900 年) 1.5, 5, 6.2, 6.3, 附录 6.3

贝蒂 (E. Betti, 1823—1892 年) 3.1, 6.4

比安基 (L. Bianchi, 1856—1928 年) 5.5

泊松 (S. D. Poisson, 1781—1840 年) 4.1

伯克霍夫 (G. D. Birkhoff, 1884—1944 年) 附录 3.3

博雷利 (G. A. Borelli, 1608—1679 年) 附录 6.3

布拉施克 (W. J. E. Blaschke, 1885—1962 年) 附录 2.4, 附录 4.3

## C

陈省身 (S. S. Chern, 1911—2004 年) 附录 2.4, 4, 附录 4.3, 5, 6

## D

达布 (J. -G. Darboux, 1842—1917 年) 1.4, 5, 附录 5.4

H. W. F. Deahna (1815—1844 年) 4.1

德拉姆 (G. de Rham, 1903—1990 年) 附录 3.3, 6.3, 附录 6.4

笛卡儿 (R. Descartes, 1596—1650 年) 附录 1.2

狄利克雷 (J. Dirichlet, 1805—1859 年) 附录 3.2

## E

恩格尔 (F. Engel, 1861—1941 年) 附录 2.4

## F

- 芬斯勒 (P. Finsler, 1894—1970 年) 5.1  
冯·诺伊曼 (J. Von Neumann, 1903—1957 年) 1.1, 附录 3.5  
弗雷内 (J. F. Frenet, 1816—1900 年) 1.3  
弗雷歇 (M. Fréchet, 1878—1973 年) 1.1  
弗里德曼 (M. Freedman, 1951 年—) 3.3  
弗罗贝尼乌斯 (F. G. Frobenius, 1849—1917 年) 4.1, 5  
富比尼 (G. Fubini, 1879—1943 年) 5.5

## G

- 高斯 (C. F. Gauss, 1777—1855 年) 1, 附录 1.3, 附录 1.4  
格罗斯曼 (M. Grossmann, 1878—1936 年) 2, 2.4, 附录 5.2

## H

- 哈代 (G. H. Hardy, 1877—1947 年) 附录 5.4  
哈密顿 (W. R. Hamilton, 1805—1865 年) 2, 2.4  
哈密顿 (R. Hamilton, 1943 年—) 5.5  
汉克尔 (H. Hankel, 1839—1873 年) 6.1  
豪斯多夫 (F. Hausdorff, 1868—1942 年) 3.1  
惠更斯 (C. Huygens, 1629—1695 年) 1.3  
惠特尼 (H. Whitney, 1907—1989 年) 3, 附录 3.3, 3.5, 6, 6.4, 附录 6.4  
霍普夫 (H. Hopf, 1894—1971 年) 4, 5.5, 6, 附录 6.4  
霍奇 (W. V. D. Hodge, 1903—1975 年) 6.2

## J

- 基灵 (W. Killing, 1847—1923 年) 附录 2.4, 5.5  
嘉当 (J. Cartan, 1869—1951 年) 2.4, 附录 2.4, 4, 附录 4.3, 5, 附录 6.4  
加德纳 (R. Gardner) 附录 2.4  
江哲涵 (1902—1994 年) 3

## K

- 卡拉比 (E. Calabi, 1923 年—) 5.5  
开尔文 (W. T. Kelvin, 1824—1907 年) 6.1  
康托尔 (G. F. L. P. Cantor, 1845—1918 年) 1.1, 3.1, 附录 3.5  
克贝 (P. Koebe, 1882—1945 年) 5.5  
克拉乌 (C. Clavius, 1538—1612 年) 附录 6.3  
克莱罗 (A. C. Clairault, 1713—1765 年) 1.3  
克莱布什 (R. F. A. Clebsch, 1833—1872 年) 4.1  
克莱因 (F. C. Klein, 1849—1925 年) 1.4, 附录 2.4, 5.5  
克雷莫纳 (L. Cremona, 1830—1903 年) 附录 6.3

克利福德 (W. K. Clifford, 1845—1879 年) 2.4  
 克里斯托费 (E. B. Christoffel, 1829—1900 年) 5, 5.4  
 克罗内克 (L. Kronecker, 1823—1891 年) 1.1  
 克外尔 (M. A. Kervaire, 1927—2007 年) 3.3  
 柯尔莫哥洛夫 (A. H. Kolmogorov, 1903—1987 年) 6, 附录 6.4  
 柯朗 (R. Courant, 1888—1972 年) 附录 6.4  
 柯西 (A. L. Cauchy, 1789—1859 年) 1.3  
 科比 (R. Bryant, 1953 年—) 附录 2.4  
 科达齐 (D. Codazzi, 1824—1873 年) 附录 6.3  
 科斯居尔 (J.-L. Koszul, 1921 年—) 5.4  
 库默尔 (E. Kummer, 1810—1893 年) 2.4

## L

拉格朗日 (J. Lagrange, 1736—1813 年) 附录 1.3, 1.4  
 拉普拉斯 (P.-S. Laplace, 1749—1827 年) 附录 1.3, 6.3  
 郎道 (E. G. H. Landau, 1877—1938 年) 附录 6.4  
 朗克雷 (M. A. Lancet, 1774—1807 年) 1.3  
 莱布尼兹 (G. H. Leibniz, 1646—1716 年) 1  
 勒贝格 (H. L. Lebesgue, 1875—1941 年) 附录 6.4  
 勒让德 (A. M. Legendre, 1752—1833 年) 附录 3.2  
 黎曼 (B. Riemann, 1826—1866 年) 附录 1.4, 3, 附录 3.2, 5.1, 6.2  
 李斯丁 (J. B. Listing, 1808—1882 年) 1.4  
 利普希茨 (R. O. S. Lipschitz, 1832—1903 年) 5  
 里奇—库尔巴斯托罗 (G. Ricci-Curbastro, 1853—1925 年) 5, 附录 5.4  
 廖山涛 (1920—1997 年) 附录 4.3  
 列维—齐维塔 (Levi-Civita, 1873—1941 年) 5, 5.4, 附录 5.4  
 刘克峰 (1965 年—) 附录 4.3  
 刘维尔 (J. Liouville, 1809—1882 年) 附录 6.3, 附录 6.4  
 洛必达 (G. de l'Hôpital, 1661—1704 年) 1.3  
 洛伦兹 (H. A. Lorentz, 1853—1928 年) 5.1  
 罗巴切夫斯基 (N. I. Lobachevsky, 1792—1856 年) 附录 1.4, 附录 6.3  
 罗素 (B. A. W. Russell, 1872—1970 年) 附录 5.4

## M

蒙日 (G. Monge, 1746—1818 年) 1, 1.4  
 蒙泰尔 (P. A. A. Montel, 1876—1975 年) 附录 6.4  
 米勒 (J. W. Milnor, 1931 年—) 6.3  
 米尔诺 (J. W. Milnor, 1931 年—) 3.3  
 闵可夫斯基 (H. Minkowski, 1864—1909 年) 5.1  
 F. Minding (1806—1885 年) 附录 6.3



莫比乌斯 (A. F. Möbius, 1790—1868 年) 1.4, 2.4  
摩根斯特恩 (O. Morgenstern, 1902—1977 年) 附录 3.5

## N

纳什 (J. Nash, 1928 年—) 3.5, 附录 3.5  
牛顿 (I. Newton, 1643—1727 年) 1, 1.3  
诺特 (E. Noether, 1882—1935 年) 附录 6.4

## O

欧几里得 (Euclid, 公元前 325—265 年) 1.1  
欧拉 (L. Euler, 1707—1783 年) 1, 1.3, 附录 1.3

## P

庞加莱 (J. H. Poincare, 1854—1912 年) 3, 3.1, 附录 5.4, 5.5, 6.4, 附录 6.4  
佩雷尔曼 (G. Y. Perelman, 1966 年—) 5.5  
皮卡 (C. E. Picard, 1856—1941 年) 附录 6.4  
普拉托 (J. A. F. Plateau, 1801—1883 年) 1.4

## Q

切赫 (E. Čech, 1893—1960 年) 6, 6.4  
丘成桐 (Shing-Tung Yau, 1949 年—) 附录 4.3, 5.5

## R

茹利亚 (G. Julia, 1893—1978 年) 附录 6.4

## S

赛雷特 (J. A. Serret, 1819—1885 年) 1.3  
沙爱福 (H. K. J. Seifert, 1907—1996 年) 4  
沙却利 (G. G. Saccheri, 1667—1733 年) 附录 6.3  
瑟斯顿 (W. Thurston, 1946—2012 年) 5.5  
施蒂费尔 (E. Stiefel, 1909—1978 年) 附录 3.3, 4  
施密特 (E. Schmidt, 1876—1959 年) 1.1  
施泰纳 (J. Steiner, 1796—1863 年) 附录 3.2  
施图迪 (C. H. E. Study, 1862—1930 年) 5.5  
斯廷罗德 (N. E. Steenrod, 1910—1971 年) 4, 6, 附录 6.4  
斯托克斯 (G. G. Stokes, 1819—1903 年) 6.1  
索菲斯·李 (M. Sophus Lie, 1842—1899 年) 4.1

## T

唐纳森 (S. K. Donaldson, 1957 年—) 3.3

## W

外尔 (H. Weyl, 1885—1955 年) 3, 4.1, 5, 5.4, 附录 6.4

王宪钟 (1918—1978 年) 附录 4.3

韦伊 (A. Weil, 1906—1998 年) 附录 6.4

文天祥 (1236—1283 年) 3

沃利斯 (J. Wallis, 1616—1703 年) 附录 6.3

吴光磊 (1921—1991 年) 附录 4.3

吴文俊 (1919 年—) 附录 4.3

## X

希尔伯特 (D. Hilbert, 1862—1943 年) 1.1, 3

小平邦彦 (K. Kodaira, 1915—1997 年) 附录 6.4

徐光启 (1562—1633 年) 1.1

## Y

雅克比 (C. Jacobi, 1804—1851 年) 附录 3.2

亚历山大 (J. W. Alexander, 1888—1971 年) 6, 附录 6.4

亚历山德罗夫 (P. S. Aleksandrov, 1896—1982 年) 附录 6.4

严志达 (1917—1999 年) 附录 4.3

杨振宁 (1922 年—) 附录 4.3, 附录 5.2

## Z

郑绍远 (Shiu-Yuen Cheng) 附录 4.3

钟开莱 (1917—2009 年) 附录 4.3

## 参考文献

- [1] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 郭孝英. 黎曼几何初步. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 陈省身. 广义相对论和微分几何. 自然杂志, 3 (4): 243-247.
- [3] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义 (第二版). 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [4] 陈维桓. 流形上的微积分. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [5] 陈维桓. 微分流形初步. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [6] 陈维桓. 极小曲面. 大连: 大连理工大学出版社, 2001.
- [7] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [8] 黄正中. 微分几何导引. 南京: 南京大学出版社, 1992.
- [9] 黄勇. 张量概念的起源与演变. 数学的实践与认识. 2008, 38 (1): 169-176.
- [10] 梅向明, 黄敬之. 微分几何 (第四版). 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [11] 米先柯, 索洛维约夫, 福明柯著. 王耀东译. 微分几何与拓扑学习题集. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [12] 苏竞存. 流形的拓扑学. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
- [13] 孙和军. 基于理工科创新型人才培养的数学文化教学. 大学教育, 2013, (12): 64-65.
- [14] 孙和军, 赵培标, 陈大广. 微分几何的教学地位与方法. 高等数学研究, 2011, 14 (1): 103-105.
- [15] 孙和军, 陈大广. 流形及其附加结构. 大学数学, 2010, 26 (5): 152-155.
- [16] 孙克宽, 郭驼英, 梁肇军. 拓扑学. 武汉: 华中师范大学出版社, 2002.
- [17] 王兵团, 张志刚, 朱婧, 颜宁生. MATLAB 与数学实验. 北京: 中国铁道出版社, 2003.
- [18] 西尔维娅·娜萨著, 王尔山译. 美丽心灵: 纳什传. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [19] 熊金城. 点集拓扑讲义 (第四版). 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [20] 徐森林, 薛春华, 胡自胜, 金亚东. 近代微分几何: 谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [21] 张奠宙, 王善平. 陈省身文集. 上海: 华东师范大学, 2002.
- [22] 张海潮. 我知道的爱因斯坦. 数学传播, 2001, 25 (3): 27-28.
- [23] 张筑生. 微分拓扑讲义. 北京: 北京大学出版社, 1996.
- [24] S. S. Chern. Hassler Whitney (23 March 1907-10 May 1989). Proceedings of the American Philosophical Society, 1994, 138 (3): 464-467.
- [25] M.P.do Carmo. *Differential Forms and Applications*. Springer-Verlag, 1994.
- [26] G. de Rham. *Differential Manifolds*. New York, Springer-Verlag, 1984.
- [27] H. Federer. Review: *Geometric integration theory*, by H. Whitney. Bulletin of the American Mathematical Society, 1958, 64 (1): 38-41.
- [28] D. Husemoller. *Fibre bundles*. Springer-Verlag, 1984.
- [29] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [30] S. Lang. *Differential and Riemannian manifolds*. Springer-Verlag, 1995.
- [31] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.

- [32] J. Milnor. *Review: Norman Steenrod, The topology of fibre bundles*. Bulletin of the American Mathematical Society, 1958, 64 (4): 202-203.
- [33] E. Portnoy. *Riemann's contribution to differential geometry*. Historia Mathematica, 1982, 9 (1): 1-18.
- [34] A. Shields. *Differentiable manifolds: Weyl and Whitney*. The Mathematical Intelligencer, 1988, 10 (2): 5-8.
- [35] F. W. Warner. *Foundations of Differential Manifold and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [36] H. Weyl. *David Hilbert. 1862-1943*. Obituary Notices of Fellows of the Royal Society, 1944, 4 (13): 547-526.
- [37] J. H. C. Whitehead. *Elie Joseph Cartan. 1869-1951*. Obituary Notices of Fellows of the Royal Society, 1952, 8 (21): 71-26.